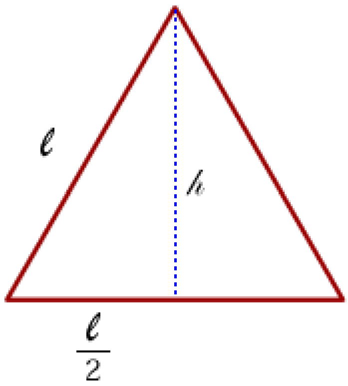
Triangolo equilatero

Formule relative al triangolo equilatero

1) Altezza in relazione al lato del triangolo equilatero



Secondo il teorema di Pitagora abbiamo che

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

da cui si ricava

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}$$

ossia

$$(1) \quad h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

2) Lato in relazione all'altezza del triangolo equilatero

Dalla (1) si ricava che

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Se moltiplico numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

ricavando la formula

$$(2) \quad l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$$

Si possono anche ricavare formule per l'area e il perimetro del triangolo equilatero in relazione all'ltezza o al lato.

Area

a) Partendo dal lato (ricorda che $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$)

$$A=\frac{l\cdot h}{2}=\frac{l\cdot\frac{l}{2}\sqrt{3}}{2}=l\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

ossia

$$(3)\qquad A=\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

a) Partendo dall'altezza (ricorda che $l=\frac{2}{3}h\sqrt{3}$)

$$A=\frac{l\cdot h}{2}=\frac{\frac{2}{3}h\sqrt{3}\cdot h}{2}=\frac{2}{3}h\sqrt{3}\cdot h\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$$

ossia

$$(4)\qquad A=\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$$

Perimetro

a) Partendo dall'altezza (ricorda che $l=\frac{2}{3}h\sqrt{3}$)

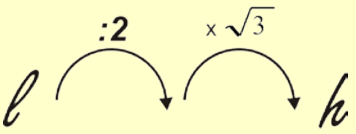
$$2p=3l=3\cdot\frac{2}{3}h\sqrt{3}=2h\sqrt{3}$$

ossia

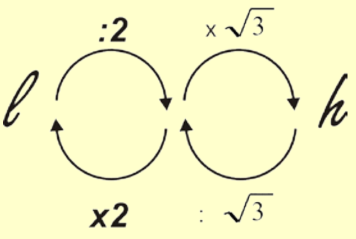
$$(6)\quad 2p=2h\sqrt{3}$$

Una formula come la (2) può essere ricavata con questo metodo[1]

Scriviamo in questo modo tutti i singoli passaggi che dal lato ci portano all'altezza nella formula (1)



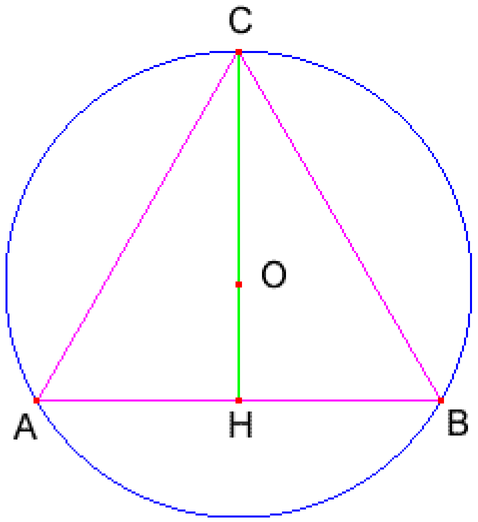
e, nel passaggio inverso, cambiamo l'orientamento delle frecce e inserendo, per ogni operazione, la sua inversa



[1] Questo schema può essere applicato ogni volta che devo ricavare formule inverse.

Dallo schema si ricavare la formula richiesta $l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$

Triangolo equilatero inscritto ad una circonferenza



OC = *r* della circonferenza

CH = *h* del triangolo equilatero (ma anche mediana[2])

O centro della circonferenza (ma anche baricentro del triangolo equilatero)

Ricorda che il *baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra*; nel caso del triangolo equilatero questo vale anche per le altezze per cui

$$CO = 2 \cdot OH$$

e

$$CH = 3 \cdot OH \; oppure \; CO = \frac{2}{3} CH$$

Dato che CH è l'altezza del triangolo equilatero e OC il raggio della circonferenza possiamo scrivere

$$r = \frac{2}{3} h \; oppure \; h = \frac{3}{2} r$$

Formule relative al triangolo equilatero inscritto

Lato del triangolo in relazione al raggio della circonferenza

Ricordando che $l = \frac{2}{3} h\sqrt{3}$ sostituiamo ad *h* il suo valore rispetto a *r*.

$$l = \frac{2}{3} h\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} r\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

ossia

$$(7) \quad l = r\sqrt{3}$$

da cui si può ricavare che

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}$$

ossia

$$(8) \quad r = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}$$

[2] Ricorda che mediane, altezze, bisettrici, assi del triangolo equilatero, coincidono

Facendo riferimento alla (3) per il calcolo dell'area, a $2p = 3l$ per il perimetro del triangolo equilatero e alla (7) possiamo scrivere le formule per calcolarne l'area e il perimetro in relazione al raggio della circonferenza.

$$A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{\left(r\sqrt{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} = \frac{r^2}{4}\cdot 3\cdot\sqrt{3}$$

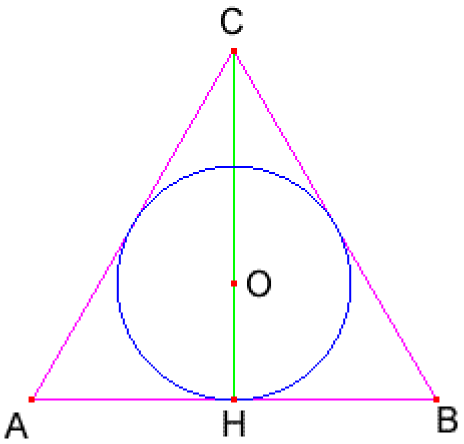
ossia, risistemando

$$A = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$$

e

$$2p = 3l = 3r\sqrt{3}$$

Triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza



OH = r della circonferenza

CH = h del triangolo equilatero (ma anche mediana[3])

O centro della circonferenza (ma anche baricentro del triangolo equilatero)

Per il triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza valgono le stesse condiderazioni fatte per triangolo equilatero inscritto e possimo scrivere che

$$CO = 2\cdot OH$$

e

$$CH = 3\cdot OH \; oppure \; OH = \frac{1}{3}CH$$

Dato che CH è l'altezza del triangolo equilatero e OH il raggio della circonferenza possiamo scrivere

$$r = \frac{1}{3}h \; oppure \; h = 3r$$

Formule relative al triangolo equilatero circoscritto

Lato del triangolo in relazione al raggio della circonferenza

Ricordando che $l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$ sostituiamo ad h il suo valore rispetto a r.

$$l = \frac{2}{3}h\sqrt{3} = \frac{2}{3}\cdot 3r\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$$

---

[3] Ricorda che mediane, altezze, bisettrici, assi del triangolo equilatero, coincidono

ossia

$$(9) \qquad l = 2r\sqrt{3}$$

Facendo riferimento alla (3) per il calcolo dell'area, a $2p = 3l$ per il perimetro del triangolo equilatero e alla (9) possiamo scrivere le formule per calcolarne l'area e il perimetro in relazione al raggio della circonferenza.

$$A = l^2\sqrt{3} = \left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3} = 4r^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 12r^2\sqrt{3}$$

ossia

$$(10) \qquad A = 12r^2\sqrt{3}$$

e

$$2p = 3l = 3 \cdot 2r\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot r \cdot 3 = 18 \cdot r$$

ossia

$$2p = 18 \cdot r$$