Prontuario degli argomenti di geometria per la classe 2a

I QUADRILATERI E LE LORO PROPRIETÀ

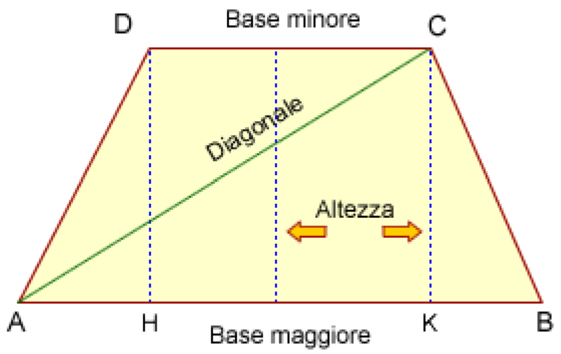
Quadrilateri

Un quadrilatero è un poligono[1] con quattro lati e quattro angoli. La somma degli angoli interni è due angoli piatti (360°). Possiede due diagonali e da ogni vertice si può condurre solo una diagonale.

I quadrilateri si classificano in

- ✓ *scaleni* o *generici* ⇒ hanno i lati senza particolari proprietà
- ✓ *trapezi* ⇒ con due lati opposti paralleli
- ✓ *parallelogrammi* ⇒ con i lati opposti paralleli
- ✓ *deltoidi* ⇒ con due coppie di lati consecutivi congruenti

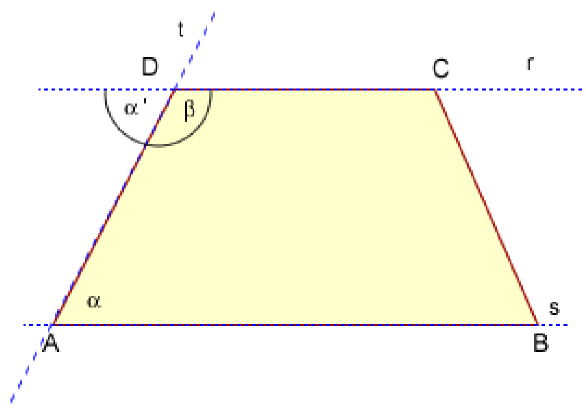
Trapezi



Un trapezio ha due lati opposti paralleli detti *basi* del trapezio, quello di lunghezza maggiore è la *base maggiore*, quello di lunghezza minore è la *base minore*. La distanza tra le basi è l'*altezza* del trapezio. I lati BC e AD sono i *lati obliqui*, AH e KB sono le proiezioni[2] dei lati obliqui sulla base maggiore. Ogni diagonale divide il trapezio in due triangoli.

Teorema: *in un trapezio gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono supplementari*.

Dimostrazione



Osserva la figura.

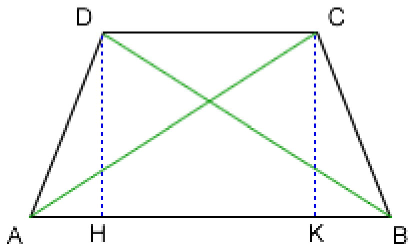
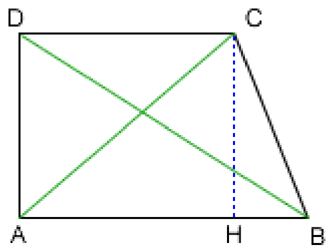
L'angolo α è uguale all'angolo α' perché angoli alterni interni di due rette, *r* e *s*, parallele tagliate da una trasversale[3], *t*.

α' e β formano un angolo piatto perche adiacenti per cui $\alpha + \beta$ sono supplementari.

Lo stesso ragionamento si può fare per gli angoli in $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

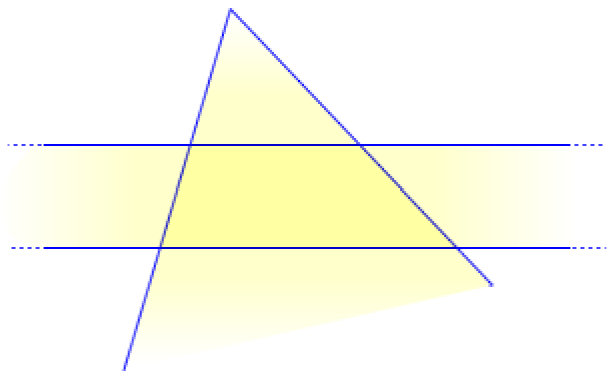
[1] Per un ripasso delle proprietà generali dei poligoni vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/geometria1.pdf.
[2] Per un ripasso del concetto di distanza e di proiezione vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/geometria1.pdf.
[3] Per un ripasso vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/geometria1.pdf.

Tipi di trapezio

Trapezio scaleno	✓ lati obliqui disuguali
Trapezio isoscele	✓ lati obliqui uguali AD = BC ✓ diagonali uguali AC = BD ✓ angoli adiacenti alla base maggiore congruenti e acuti $\hat{A} = \hat{B}$ ✓ angoli adiacenti alla base minore congruenti e ottusi $\widehat{D} = \hat{C}$  ✓ proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore, uguali AH = KB ✓ possiede un asse di simmetria[4] che coincide con l’asse delle basi
Trapezio rettangolo	✓ Un lato perpendicolare alle basi la cui misura coincide con l’altezza ✓ la proiezione del lato obliquo sula base maggiore è la differenza tra le basi BH = AB - CD 

Definizione alternativa di trapezio

Intersezione tra una striscia (parte di piano compresa tra due rette parallele) ed un angolo convesso avente il vertice fuori della striscia.



- ✓ Se un lato dell’angolo è perpendicolare alla striscia abbiamo il trapezio rettangolo
- ✓ Se la bisettrice dell’angolo è perpendicolare alla striscia abbiamo il trapezio isoscele

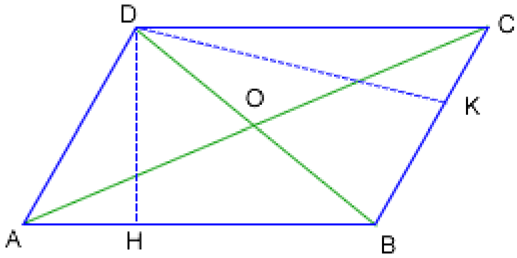
[4] Vedi la parte riguardante le isometrie.

Parallelogrammi

Il parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti a due a due paralleli e congruenti.

L'altezza di un parallelogramma è la distanza tra il lati paralleli quindi

- ✓ AH (un qualsiasi segmento parallelo ad AH) è l'altezza relativa ai lati AB e CD
- ✓ DK (un qualsiasi segmento parallelo ad DK) è l'altezza relativa ai lati AD e BC



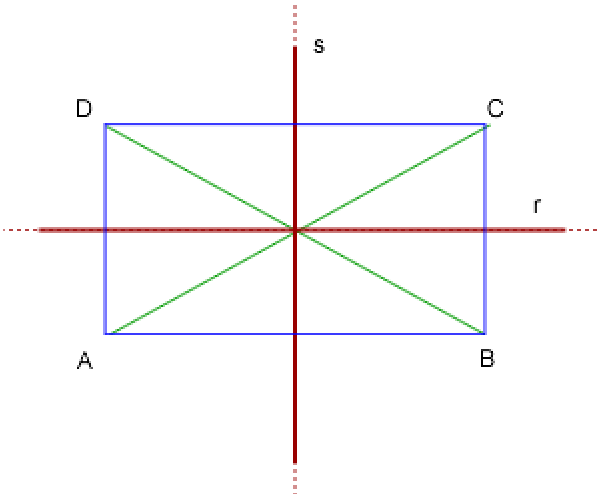
Altre caratteristiche del parallelogramma

- ✓ Angoli opposti congruenti $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$
- ✓ Angoli adiacenti ad uno stesso lato sono supplementari
- ✓ Le diagonali si dimezzano scambievolmente a metà AO = CO e BO = DO
- ✓ Non possiede assi di simmetria

Parallelogrammi particolari

Rettangolo

Un rettangolo è un parallelogramma con *quattro angoli retti*. Due lati consecutivi del rettangolo vengono chiamati *dimensioni* del rettangolo



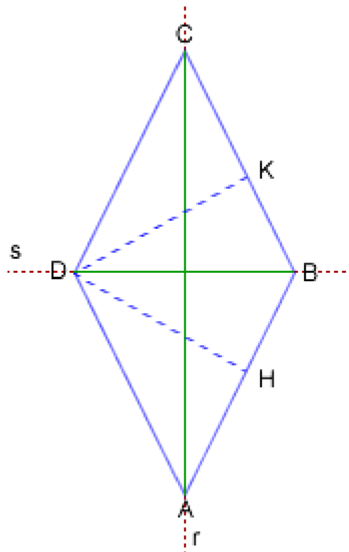
Proprietà

- ✓ Angoli uguali
- ✓ Diagonali uguali che si dimezzano scambievolmente AC = BD
- ✓ Possiede due assi di simmetria *s* e *r*

Perimetro $2p = (AB + BC) \cdot 2$

Rombo

Un rombo è un parallelogramma con *quattro lati uguali*.



Proprietà

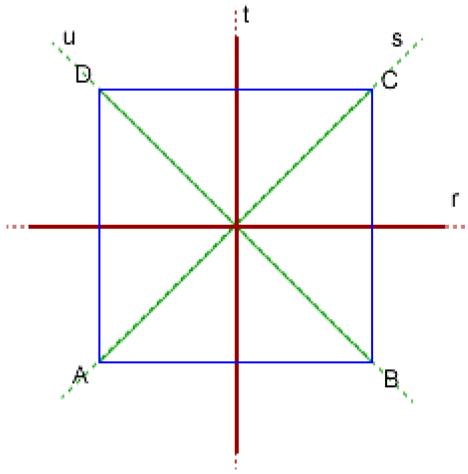
- ✓ Diagonali perpendicolari che si dimezzano scambievolmente AC ⊥ BD
- ✓ Possiede due assi di simmetria che coincidono con le rette *s* e *r* che comprendono le diagonali
- ✓ Le altezze sono uguali. DH (o qualsiasi distanza tra le rette di sostegno[5] ai lati AB e CD) = DK (o qualsiasi distanza tra le rette di sostegno[6] ai lati AD e BC)

Perimetro $2p = AB \cdot 4$

[5] Retta che comprende il lato.
[6] Retta che comprende il lato.

Quadrato

Un quadrato è un quadrilatero con *quatto lati uguali* e gli *angoli retti*. Si può considerare come l'intersezione tra l'insieme dei rettangoli e quello dei rombi. È un *poligono regolare*.



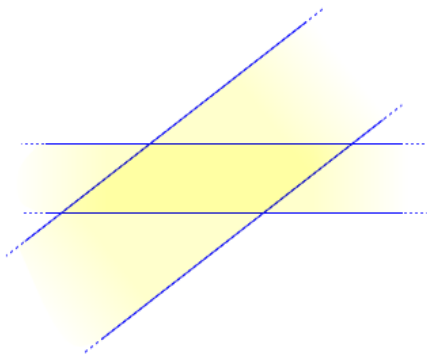
Proprietà

- ✓ Diagonali perpendicolari e uguali
- ✓ Possiede quattro assi di simmetria, due che coincidono con le rette *s* e *u* che comprendono le diagonali e due, *t* e *r*, che rappresentano gli assi dei lati opposti.
- ✓ Possiede un centro di simmetria[7] che coincide con il punto di intersezione delle diagonali.

Perimetro $2p = AB \cdot 4$

Definizione alternativa di parallelogramma

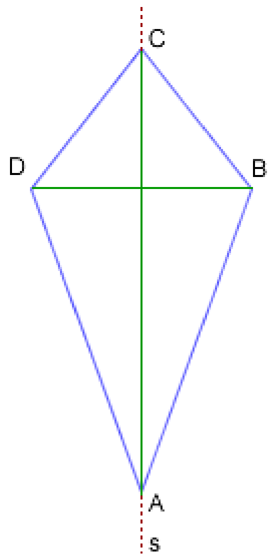
Parte di piano ottenuta intersecando due strisce.



- ✓ Se le strisce sono di diversa larghezza e perpendicolari tra loro abbiamo il rettangolo
- ✓ Se le strisce sono di uguale larghezza e non perpendicolari abbiamo il rombo
- ✓ Se le strisce sono di uguale larghezza e perpendicolari tra loro abbiamo il quadrato

Deltoide convesso

Il deltoide o aquilone è un quadrilatero che possiede due coppie di lati congruenti che sono consecutivi: AB = AD e BC = CD.



Proprietà

- ✓ Diagonali perpendicolari
- ✓ La diagonale AC bisettrice degli angoli formati dai lati congruenti divide l'altra diagonale in due parti congruenti: divide il deltoide in due triangoli inversamente congruenti[8] e per essa passa l'asse di simmetria della figura
- ✓ La diagonale DB, bisettrice degli angoli formati dai lati non congruenti divide il deltoide in due triangoli isosceli. Gli angoli formati dai lati non congruenti sono congruenti $\hat{B} = \hat{D}$

Perimetro $2p = (AB + BC) \cdot 2$

[7] Vedi la parte riguardante le isometrie.
[8] Vedi la parte riguardante le isometrie.

EQUIVALENZA DI SUPERFICI E AREA

Definizioni

La *superficie* di una figura geometrica è la *parte di piano* occupata dalla figura.

L'*area* di una figura è la *misura* della sua superficie.

Due figure sono *equivalenti* o *equiestese* se hanno la stessa superficie.

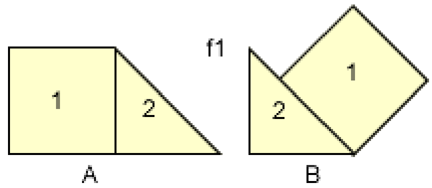
Due figure sono *equicomposte* o *equiscomponibili* se sono formate dallo *stesso numero di parti congruenti*.

Due figure equiscomponibili sono sempre equivalenti ma non vale l'inverso[9].

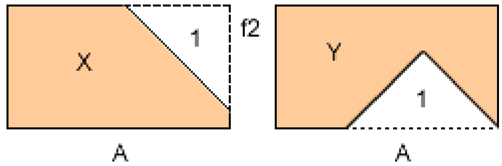
Per indicare la figura A è equivalente alla figura B si scrive $A \doteq B$

Due figure congruenti sono anche equiestese ma non vale l'inverso[10].

Criteri di equivalenza tra superfici



Superfici che sono *somme* di *superfici rispettivamente congruenti* sono equivalenti ($\Rightarrow$ f1: $A \doteq B$ perché A = 1 + 2 e B = 1 + 2)



Superfici che sono *differenza* fra *superfici rispettivamente congruenti* sono equivalenti ($\Rightarrow$ f1: $X \doteq Y$ perché X = A - 1 e Y = A - 1)

Unità di misura dell'area di una superficie

L'area è un *numero che esprime quante volte la superficie campione è contenuta nella superficie da misurare*. La superficie campione è quella di un *quadrato con lato di un metro* a cui si assegna il valore di 1 m^2.

Multipli 1 $dam^2 = 10^2\ m^2$; 1 $hm^2 = 10^2\ dam^2 = 10^4\ m^2$; 1 $km^2 = 10^2\ hm^2 = 10^4\ dam^2 = 10^6\ m^2$

Sottomultipli 1 $m^2 = 10^2\ dm^2$; 1 $m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2$; 1 $m^2 = 10^2\ dm^2 = 10^4\ cm^2 = 10^6\ mm^2$

Formule per le aree di figure piane (*b* e *h* rappresentano rispettivamente base e altezza, A l'area)

Rettangolo

Formula	Formule inverse
$A = b \cdot h$	$b = \frac{A}{h}; h = \frac{A}{b}$

Triangolo

Formula	Formule inverse
$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$b = \frac{2 \cdot A}{h}; h = \frac{2 \cdot A}{b}$

Formula di Erone per il calcolo dell'area del triangolo dai i tre lati *a*, *b*, *c* e il *semiperimetro p*.

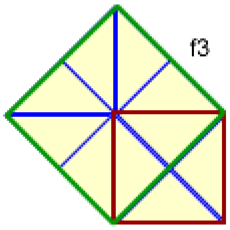
$$\sqrt{\frac{p}{2} \cdot \left(\frac{p}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{p}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

[9] Ossia due figure equivalenti non sono necessariamente equiscomponibili (esempio: cerchio e rettangolo con stessa area)
[10] Ossia due figure equivalenti non necessariamente son congruenti (esempio: triangolo e rettangolo con stessa area)

Quadrato

Formula Formule inverse

$A = l^2$ $l = \sqrt{A}$



Considerando che l'area del quadrato costruito sulla diagonale d è doppia di quella del quadrato (vedi f3) si può scrivere che

$$A = \frac{d^2}{2} \qquad d = \sqrt{A \cdot 2}$$

Da $d = \sqrt{A \cdot 2}$ e da $A = l^2$ si può ricavare $d = \sqrt{l^2 \cdot 2} = l \cdot \sqrt{2}$

Parallelogramma

Formula Formule inverse

$A = b \cdot h$ $b = \frac{A}{h}; h = \frac{A}{b}$

Rombo

Formula Formule inverse

$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ $d_1(d_2) = \frac{2 \cdot A}{d_2(d_1)}$

d_1 e d_2 diagonali del rombo

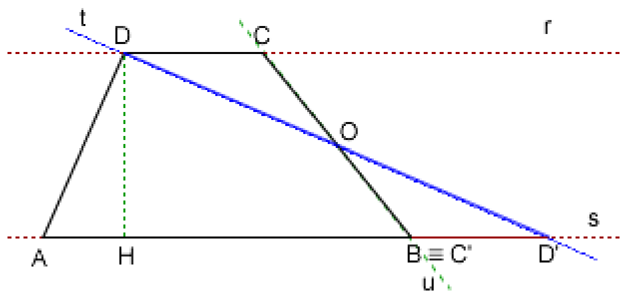
Trapezio

Formula Formule inverse

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ $B + b = \frac{2 \cdot A}{h}; h = \frac{2 \cdot A}{B + b}$

B e b son rispettivamente base maggiore e base minore.

Dimostrazione della formula dell'area del trapezio



Il trapezio ABCD è equiscomponibile con il triangolo AD'D in quanto

- ✓ le due figure condividono il poligono ABOD
- ✓ i due triangoli OCD e BD'O sono congruenti per il 2° criterio di congruenza dei triangoli[11] in quanto
  a) DC = C'D' per trasporto[12]
  b) $\hat{B} = \hat{C}$ in quanto angoli alterni interni alla trasversale[13] u delle parallele r e s

[11] Per un ripasso vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/geometria1.pdf.
[12] Base minore adiacente alla maggiore
[13] Per un ripasso su rette parallele tagliate da una trasversale vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/geometria1.pdf.

c) $\hat{B} = \widehat{D'}$ in quanto angoli alterni interni alla trasversale *t* delle parallele *r* e *s*

Si calcola allora l'area del triangolo AD'D che ha come base la somma delle basi del trapezio AB + CD (C'D') e come altezza quella del trapezio DH ricavando così la formula dell'area del trapezio.

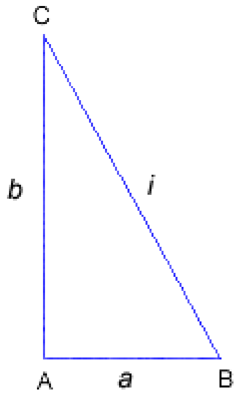
Area di un poligono generico

Si scompone il poligono in figure note e si sommano le aree di queste figure.

Perimetro e area

- ✓ Due poligoni aventi lo stesso perimetro sono detti isoperimetrici.
- ✓ Due poligoni isoperimetrici non sono generalmente equivalenti
- ✓ Due poligoni equivalenti non sono generalmente isoperimetrici
- ✓ Tra i poligoni isoperimetrici con lo stesso numero di lati è quello regolare che ha l'area massima
- ✓ Tra tutti i quadrilateri isoperimetrici il quadrato è quello con area massima.

TEOREMA DI PITAGORA

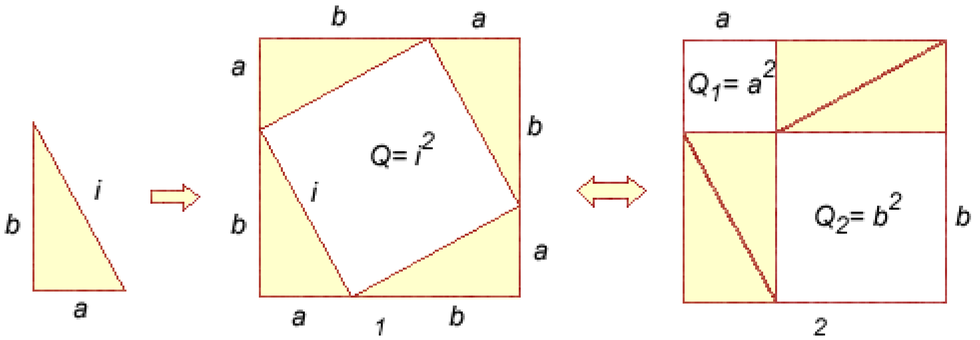


In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull' ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti

$$i^2 = a^2 + b^2$$

Dimostrazione

Osserva la figura



I quadrati 1 e 2 sono congruenti in quanto il loro lato è $a + b$. Se togliamo da entrambi i quattro triangoli rettangoli congruenti la parti rimanenti sono equivalenti $Q = Q_1 + Q_2$ ossia $i^2 = a^2 + b^2$.

Esistono anche altre dimostrazioni che puoi trovare in Le mille dimostrazioni del teorema di Pitagora del progetto Polymath.

Conseguenze del teorema di Pitagora

Calcolo dell'ipotenusa

$i = \sqrt{a^2 + b^2}$

Calcolo dei cateti

$a = \sqrt{i^2 - b^2} \quad b = \sqrt{i^2 - a^2}$

Terne pitagoriche

Tre numeri formano una *terna pitagorica* se la *somma dei quadrati dei due numeri minori è uguale al quadrato del numero maggiore*.

Data una terna pitagorica moltiplicando o dividendo per lo stesso numero (diverso da 1 e 0) i tre numeri della terna si ottiene un'altra terna pitagorica.

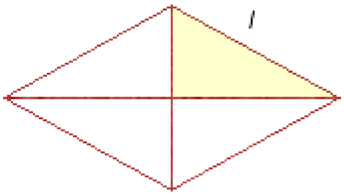
Alcune formule per trovare una terna pitagorica

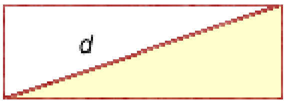
a, *b*, *c* numeri della terna

- ✓ $a = n \quad b = (n\char`^2 - 1)/2 \quad c = (n\char`^2 + 1)/2 \;\; con\ n > 1\ e\ dispari$
- ✓ $a = m^2 - n^2 \quad b = 2 \cdot m \cdot n \quad c = m^2 + n^2$ con
  - $m > n$
  - m e n primi fra loro
  - se m pari allora n dispari e viceversa

Applicazioni del teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora si applica in tutti quei problemi in cui è necessario conoscere il valore di un elemento inserito in un triangolo rettangolo come, per esempio , la diagonale di un rettangolo, il lato di un rombo partendo dalle diagonali, ecc.





Casi particolari

Quadrato o triangolo rettangolo isoscele

d diagonale o ipotenusa, *l* lato o cateto

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2 \cdot l^2} = l \cdot \sqrt{2} \qquad l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Triangolo equilatero

h altezza, *l* lato

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot l^2}{4}} = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2} \qquad l = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{3}}$$

Triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°

i ipotenusa, *a* cateto minore, *b* cateto maggiore

$$a = \frac{i}{2} \qquad b = \sqrt{i^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2} = \sqrt{i^2 - \frac{i^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot i^2}{4}} = \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}$$

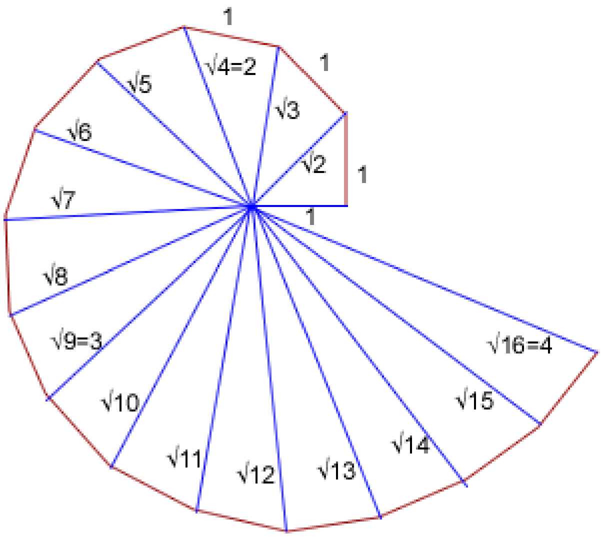
Teorema di Pitagora e numeri irrazionali

Il teorema di Pitagora può essere utilizzato per rappresentare i numeri irrazionali sulla retta orientata, costruendo triangoli rettangoli in cui l'ipotenusa sia un numero irrazionale e riportando il segmento che la rappresenta sulla retta orientata partendo dall'origine.

Esempio

$\sqrt{2}$

Spirale della radice quadrata



Si costruisce disegnando inizialmente un triangolo rettangolo isoscele con i cateti lunghi 1 unità e in successione gli altri triangoli rettangoli aventi ciascuno il cateto minore lungo sempre 1 unità e il cateto maggiore coincidente con l'ipotenusa del triangolo precedente.

I raggi della spirale (le ipotenuse dei triangoli rettangoli) avranno i valori delle radici quadrate della successione dei numeri naturali.

Questa spirale è detta anche spirale di Teodoro[14].

RAPPORTI TRA GRANDEZZE[15]

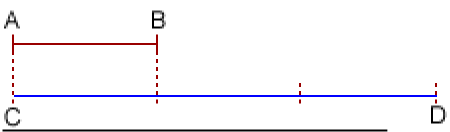
Rapporto tra segmenti

Dati due segmenti *AB* e *CD* si può esprimere la misura *CD* di rispetto a *AB* indicando quante volte *AB* è contenuto in *CD*. Se

- ✓ *AB* è contenuto un numero *n* esatto di volte si scriverà $CD = n \cdot AB$ o $CD/AB = n$ e si dice che *CD* è multiplo di *AB* secondo *n* o che è sottomultiplo *AB* di *CD* secondo *n*.
- ✓ *AB* non è contenuto un numero esatto di volte si considera il sottomultiplo *u* di *AB* che sia contenuto *m* volte esatte in *AB* e *n* volte esatte in *CD* e si scriverà

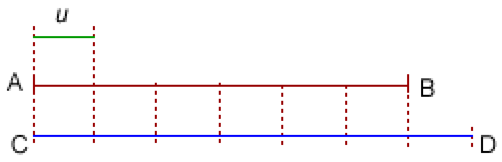
$$AB = m \cdot u \qquad CD = n \cdot u \qquad \frac{CD}{AB} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n} \qquad AB = \frac{m}{n} \cdot CD$$

Esempi



$CD = 3 \cdot AB$

[14] Filosofo greco della scuola di Pitagora
[15] Vedi la parte generale negli argomenti di aritmetica.



$AB = 6 \cdot u \quad CD = 7 \cdot u \qquad \frac{CD}{AB} = \frac{7 \cdot u}{6 \cdot u} = \frac{7}{6} \quad CD = \frac{7}{6} \cdot AB$

Segmenti commensurabili e incommensurabili

Due segmenti *AB* e *CD* si dicono *commensurabili* se ammettono un sottomultiplo comune ossia se il rapporto tra *CD* e *AB* dà origine a un numero naturale o un numero razionale assoluto.

Due segmenti *AB* e *CD* si dicono *incommensurabili* se non ammettono un sottomultiplo comune ossia se il rapporto tra *CD* e *AB* non può essere espresso da un numero naturale o un numero razionale assoluto.

Esempi di segmenti incommensurabili

Diagonale del quadrato e suo lato: infatti il loro rapporto è $\sqrt{2}$ che è un numero irrazionale[16].

Circonferenza e diametro del cerchio: il loro rapporto è un numero irrazionale indicato con π il cui valore, approssimato al centesimo, è 3,14[17].

[16] Vedi negli argomenti di aritmetica e più indietro nella parte del teorema di Pitagora
[17] Argomento del prossimo anno.

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Una trasformazione geometrica è una funzione[18] che fa corrispondere ad ogni punto P del piano uno e un solo punto P' sempre del piano e viceversa punti[19]. P' è detto *immagine* e P *controimmagine*.

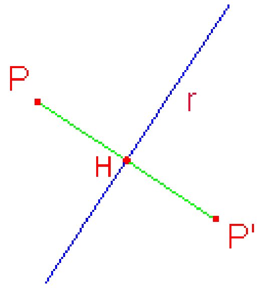
Le trasformazioni geometriche si possono classificare in relazione agli *invarianti* ossia quelle caratteristiche che non variano nell'immagine rispetto alla controimmagine.

Isometrie

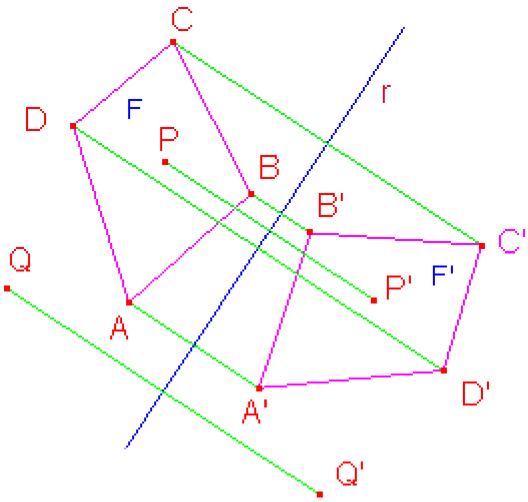
Le isometrie sono quelle trasformazioni geometriche in cui gli invarianti sono le caratteristiche *metriche* della figura ossia nella trasformazione si preserva la forma e l'estensione.

Le isometrie comprendono le seguenti trasformazioni geometriche: *simmetria assiale*, *simmetria centrale*, *traslazione*, *rotazione*.

Simmetria assiale



Una *simmetria assiale* è una *isometria* che data una retta *r* associa ad ogni punto P del piano uno e uno solo punto P' ottenuto tracciando la perpendicolare passante per P alla retta *r* e riportando dal piede H della perpendicolare, dalla parte opposta a P, la distanza PH. La retta r è detta *asse di simmetria*.



Per determinare una simmetria assiale è necessario assegnare l'asse di simmetria, rispetto al quale ogni punto del piano ha la sua immagine, che è unica, e viceversa.

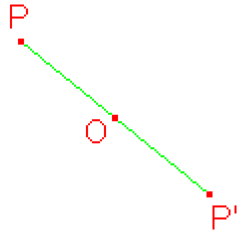
Se troviamo la simmetrica rispetto ad una asse r di una figura F si nota che:

a) i segmenti che uniscono punti corrispondenti della figura con la sua immagine sono *paralleli tra loro* e *perpendicolari* all'asse

b) le due figure F e F' si possono sovrapporre ribaltando[20] il semipiano che contiene la figura F intorno all'asse r; si dice che le due figure sono *inversamente congruenti*.

Se una retta divide una figura in due parti inversamente congruenti allora è asse di simmetria della figura.

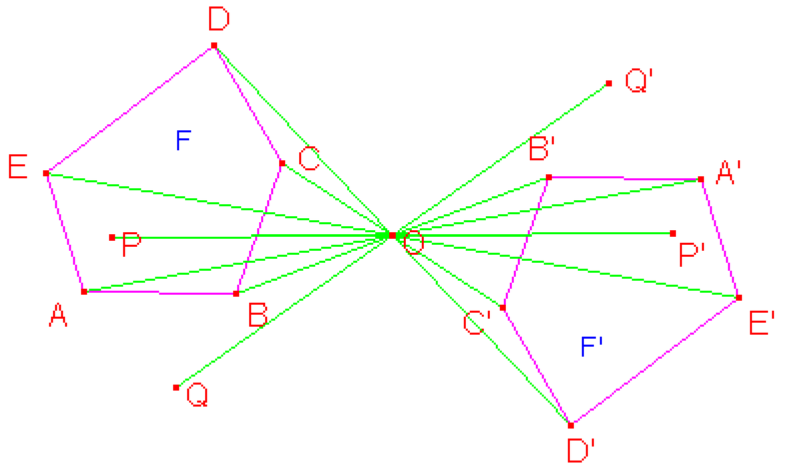
Simmetria centrale



Una *simmetria centrale* o *simmetria rispetto ad un punto* è una *isometria* che dato un punto O, detto centro di simmetria, associa ad ogni punto P del piano uno e uno solo punto P' in modo tale che O sia il punto medio del segmento PP'.

[18] Vedi negli argomenti di aritmetica.
[19] È una biiezione. Vedi negli argomenti di aritmetica.
[20] Questo viene anche detto *movimento inverso* in quanto, per compierlo, occorre uscire dal piano.

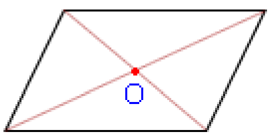
Per determinare una simmetria centrale è necessario assegnare il centro di simmetria, rispetto al quale ogni punto del piano ha la sua immagine, che è unica, e viceversa. Se troviamo la simmetrica rispetto ad un punto O di una figura F si nota che



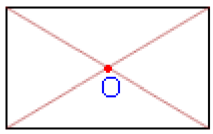
a) è il punto medio del segmento che unisce punti corrispondenti delle figure F e F' (esempio AA' o PP') o del piano (esempio QQ') e tutti questi segmenti passano per O
b) le due figure si sovrappongono se ruoto di 180° la figura F prendendo come centro di rotazione O; le due figure sono *direttamente congruenti*.

Una figura è dotata di centro di simmetria quando esiste un punto O rispetto al quale per ogni punto P della figura il simmetrico P' rispetto ad O appartiene alla figura.

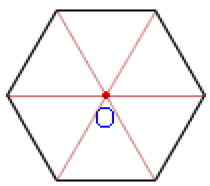
Alcune figure con centro di simmetria



Parallelogramma



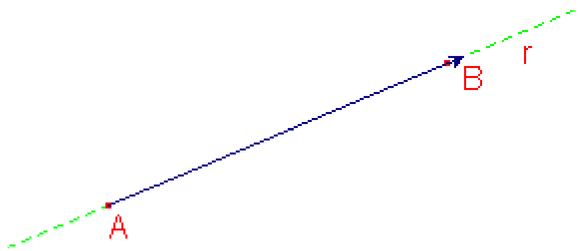
rettangolo



esagono regolare

Traslazione

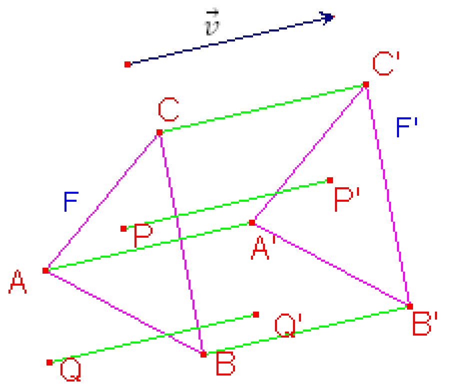
Si chiama *vettore* l'ente geometrico rappresentato da un *segmento orientato*, un segmento che comprende tre informazioni



a) la *direzione* ossia la retta *r* a cui appartiene il segmento;
b) il *verso* rappresentato dalla freccia ossia il senso di percorrenza (da A a B nella figura);
c) la *lunghezza* o *modulo*.

La *traslazione* è un *movimento diretto*[21] del piano individuato da *vettore*. Per ogni punto P del piano l'immagine P' si trova tracciando da P il segmento orientato PP' uguale al vettore $\vec{v}$ dato.

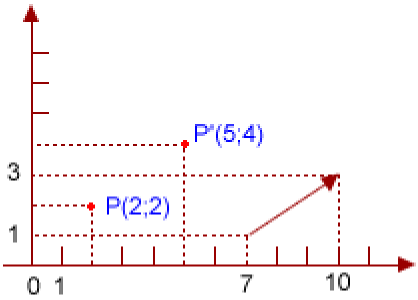
Se troviamo la corrispondente F' rispetto ad un vettore $\vec{v}$ di una figura F si nota che:



[21] Movimento che avviene sempre all'interno del piano.

a) i segmenti che uniscono i punti corrispondenti della figura con la sua immagine sono *paralleli* al vettore e della *stessa lunghezza* di questi
b) le due figure F e F' si possono sovrapporre muovendo il piano che contiene la figura F secondo il vettore; le due figure sono *direttamente congruenti*.

Utilizzando il piano cartesiano[22] si può rappresentare la traslazione di un punto P a P' con questa formula

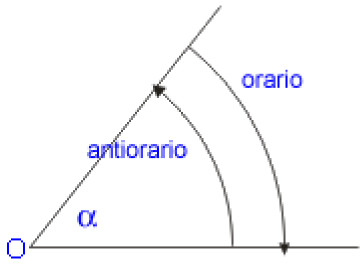


$\begin{cases} x' = x + x_v \\ y' = y + y_v \end{cases}$ dove *x'* e *y'* sono le coordinate di P' da ottenere, *x* e *y* sono le coordinate di P, x_v e y_v le componenti del vettore.

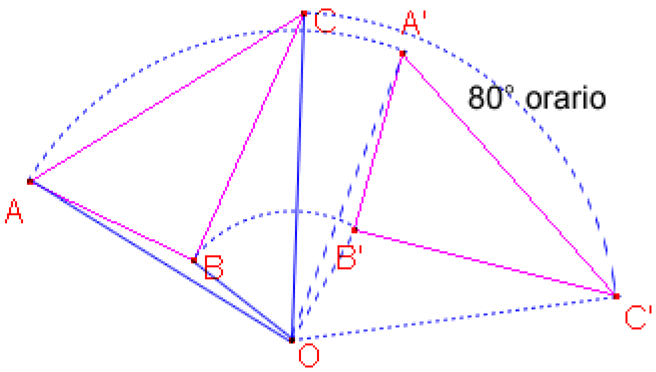
Esempio (vedi figura)

$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ perché lo spostamento orizzontale (*x*) indicato dal vettore è 3 (10 – 7) e quello verticale (*y*) 2 (3 – 1).

Rotazione



La rotazione è il *movimento diretto* del piano individuato da un punto O, *centro di rotazione* e da un *angolo orientato* ossia *un angolo con un ampiezza α e un verso di rotazione* che può essere *orario* o *antiorario*.



Due figure che si corrispondono in una rotazione sono direttamente congruenti.

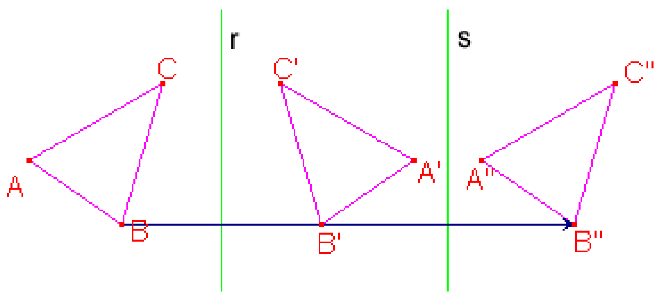
Una particolare rotazione è quella di 180° che coincide con una simmetria centrale.

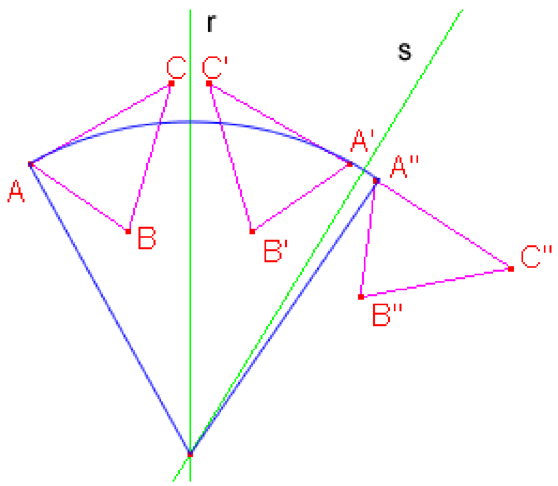
Composizione di isometrie

La composizione o *prodotto* di due isometrie si indica in questo modo *I* ⋆ *I* e si legge *I* composto I

Composizione di due simmetrie assiali

a) Se gli assi sono paralleli si ha una *traslazione*
b) Se gli assi non sono paralleli si ha *una rotazione*

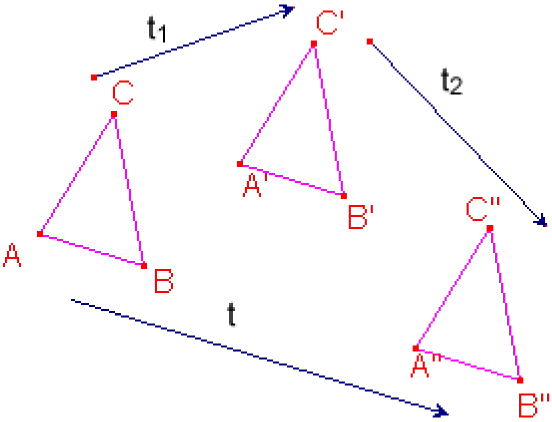


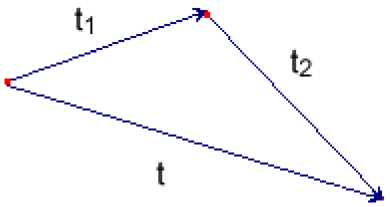


[22] Vedi appendice

Composizione di traslazioni

Componendo più traslazioni si ottiene una traslazione.

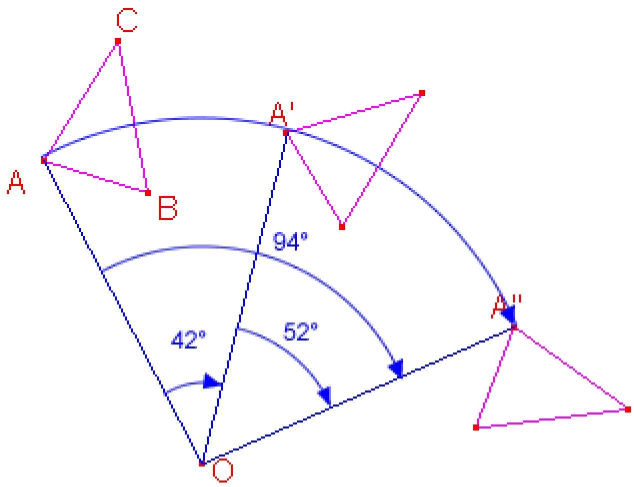




$\vec{t_1} \star \vec{t_2} = \vec{t}$

Componendo un vettore con il suo inverso si ha una *traslazione nulla* ossia si trasforma il piano in se stesso

Composizione di rotazioni concentriche

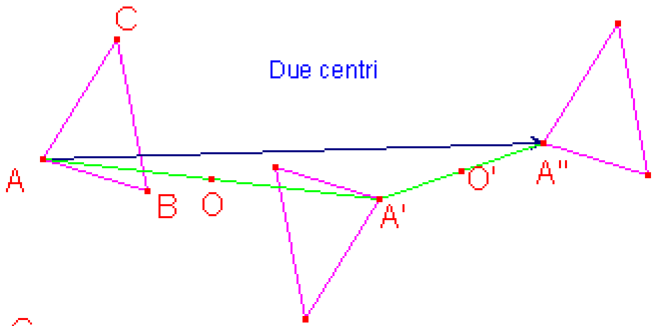


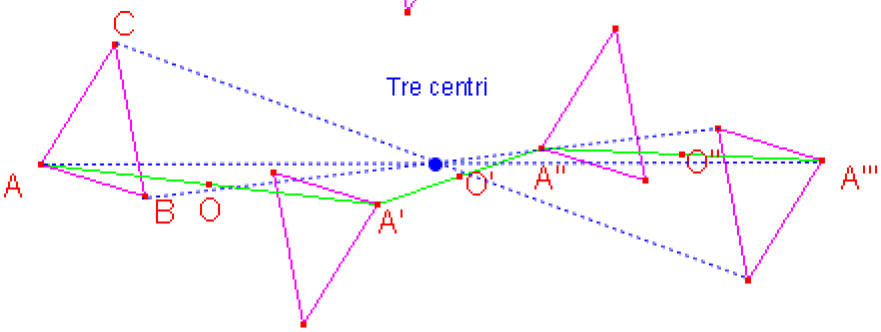
Componendo più rotazioni concentriche si ottiene una rotazione.

Componendo una rotazione con la sua inversa si ha una rotazione *nulla* ossia si trasforma il piano in se stesso

Composizione di simmetrie centrali

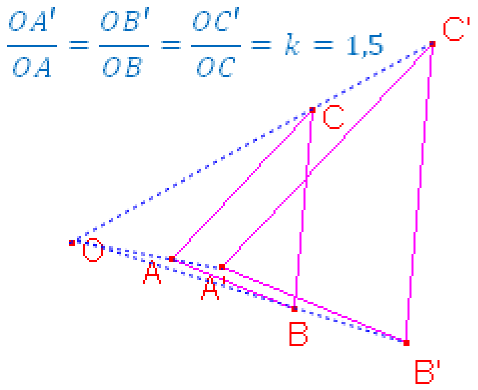
a) La composizione di un numero pari di simmetrie centrali è una traslazione
b) la composizione di un numero dispari di simmetrie centrali è una simmetria centrale

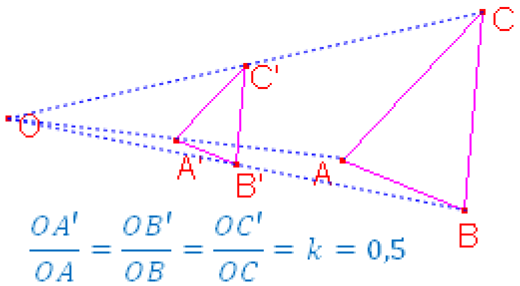




Omotetia e similitudine

Omotetia





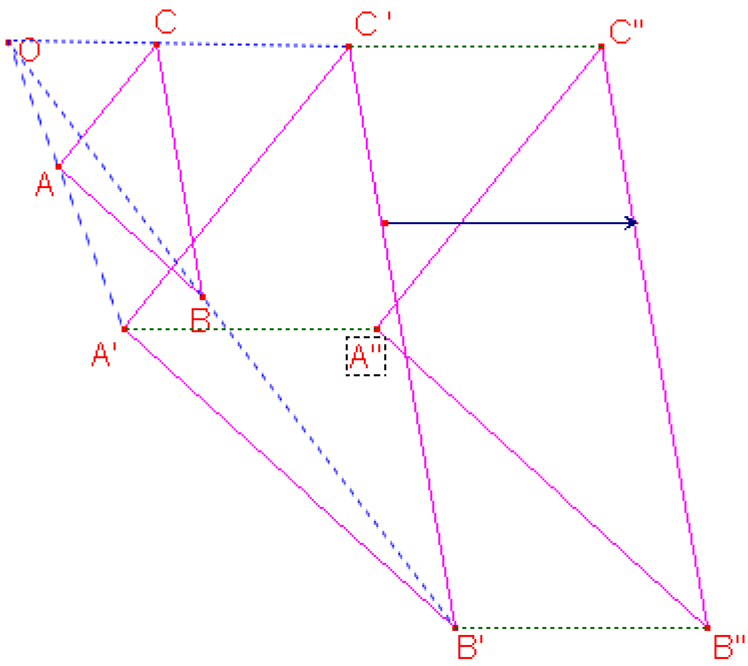
Si dice *omotetia* di centro O e di rapporto *k* la trasformazione geometrica che fa corrispondere ad ogni punto P del piano il punto P’ in modo che P e P’ siano allineati rispetto ad O e che il rapporto tra i segmenti OP’ e OP sia costante per ogni coppia di punti del piano ossia che per una qualsiasi coppia P e P’ $OP'/OP = k$.

L’omotetia è una *corrispondenza biunivoca*. Gli invarianti sono l’*ampiezza degli angoli* e il *rapporto*.

Data una figura F se:

a) $k > 1$ F’ è un ingrandimento di F;
b) $0 < k < 1$ F’ è una riduzione di F;
c) $k = 1$ F e F’ coincidono (*omotetia identica*)

Similitudine



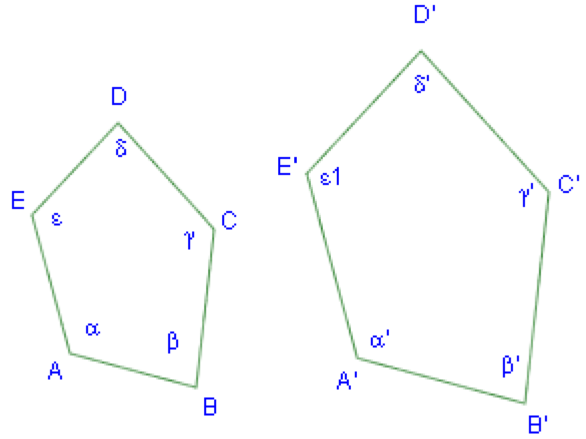
La *similitudine* è una trasformazione geometrica che si ottiene c*omponendo una omotetia con una isometria*. Le figure F e F’ che si corrispondono in una similitudine sono dette *simili*.

L’invariante della similitudine è la *forma* delle figure ossia

- ✓ gli angoli corrispondenti sono uguali
- ✓ il rapporto tra segmenti corrispondenti è costante e viene detto *rapporto di similitudine*.

Poligoni simili

Due poligoni sono simili se hanno gli angoli corrispondenti uguali e i lati corrispondenti in proporzione.



I due poligoni sono simili in quanto

$$\alpha = \alpha';\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma';\ \delta = \delta';\varepsilon = \varepsilon'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{A'E'}{AE}$$

Il rapporto tra i lati corrispondenti è il rapporto di similitudine.

Dato un poligono F e il rapporto di similitudine si trova il corrispondente F' costruendo un poligono con gli stessi angoli di F ma con le misure dei lati moltiplicate per il rapporto di similitudine.

Se il rapporto di similitudine è

a) maggiore di 1 F' è un ingrandimento di F;
b) se è compreso tra 0 e 1 F' è una riduzione di F;
c) uguale 1 F e F' sono congruenti quindi la *congruenza è un caso particolare della similitudine.*

In due poligoni simili il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine k .

In due poligoni simili il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine k ossia

$$\frac{A'}{A} = k^2 \text{ oppure } k = \sqrt{\frac{A'}{A}}$$

Criteri di similitudine dei triangoli

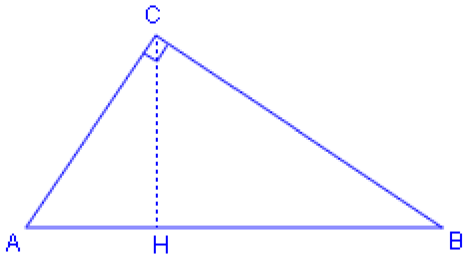
1) Due triangoli sono simili se hanno gli angoli rispettivamente congruenti.
   Conseguenze:
   a) Due triangoli equilateri sono simili
   b) Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
   c) Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.
2) Due triangoli sono simili se hanno in proporzione due coppie di lati e congruente l'angolo fra essi compreso
3) Due triangoli sono simili se hanno i lati corrispondenti proporzionali

La *similitudine è una relazione d'equivalenza*[23] nel piano in quanto possiede queste proprietà.

a) ogni figura F è simile a se stessa (k = 1) ⇒ proprietà riflessiva
b) se F è simile a F' anche F' è simile a F ⇒ proprietà simmetrica
c) se F è simile a F' e F' è simile a F'' allora F è simile a F'' ⇒ proprietà transitiva

[23] Vedi negli argomenti di aritmetica

Teoremi di Euclide



I teoremi di Euclide si applicano solo ai triangoli rettangoli e si ricavano dall'applicazione della similitudine tra triangoli.

AC, BC cateti; AB ipotenusa

AH proiezione di AC

BH proiezione di BC

CH altezza relativa all'ipotenusa

1° teorema

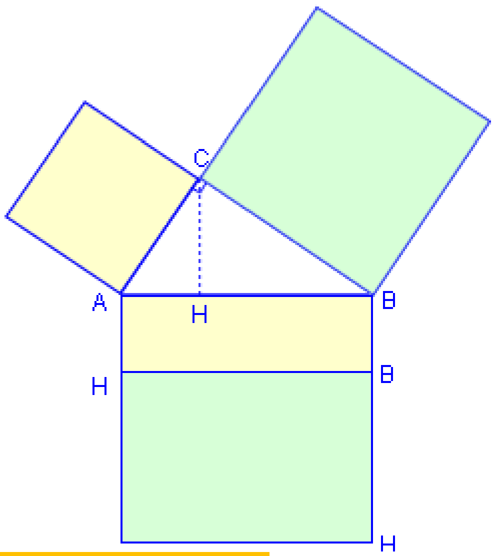
In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso su di essa ossia

$$AH : AC = AC : AB \qquad BH : BC = BC : AB$$

Dimostrazione

Il teorema si ricava dimostrando che i triangoli ACH e ABC sono simili. Infatti $\widehat{H} = \hat{C}$ perché retti, l'angolo $\hat{A}$ è in comune e quindi per il primo criterio[24] di eguaglianza dei triangoli ACH e ABC sono simili per cui hanno i lati corrispondenti in proporzione e si può scrivere

AH[25] $: AC$[26] $= AC$[27] $: AB$[28] ossia il 1° teorema di Euclide[29].



Definizione geometrica del 1° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il *quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per dimensioni l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa* ossia

$AC^2 = AH \cdot AB$ e $BC^2 = BH \cdot AB$.

Se si mettono assieme le due eguaglianze si ottiene il teorema di Pitagora

$AC^2 + BC^2 = AH \cdot AB + BH \cdot AB = AB \cdot (AH + BH)$

ma $AH + BH = AB$ quindi $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AB = AB^2$ che rappresenta il teorema di Pitagora.

2° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa ossia

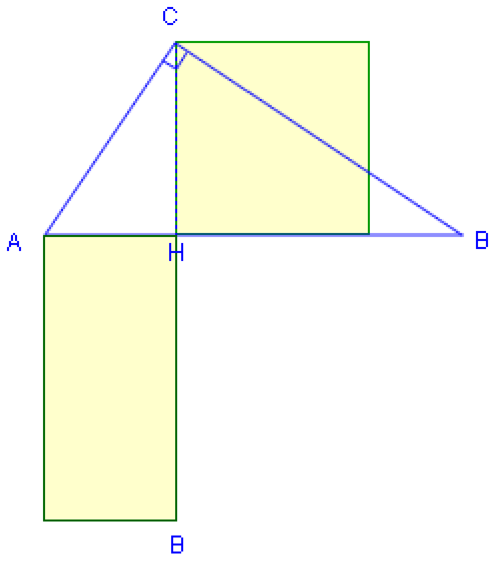
$$AH : CH = CH : BH$$

[24] Vedi la conseguenza a) del 1° criterio
[25] Cateto di ACH
[26] Cateto di ABC
[27] Ipotenusa di ACH
[28] Ipotenusa di ABC
[29] In modo analogo si ragione per i triangoli BCH e ABC

Dimostrazione

Nel primo teorema di Euclide abbiamo dimostrato che sia ACH che BCH sono simili a ABC quindi, per la proprietà transitiva delle relazioni d'equivalenza[30], sono simili tra loro.

Definizione geometrica del 1° teorema di Euclide



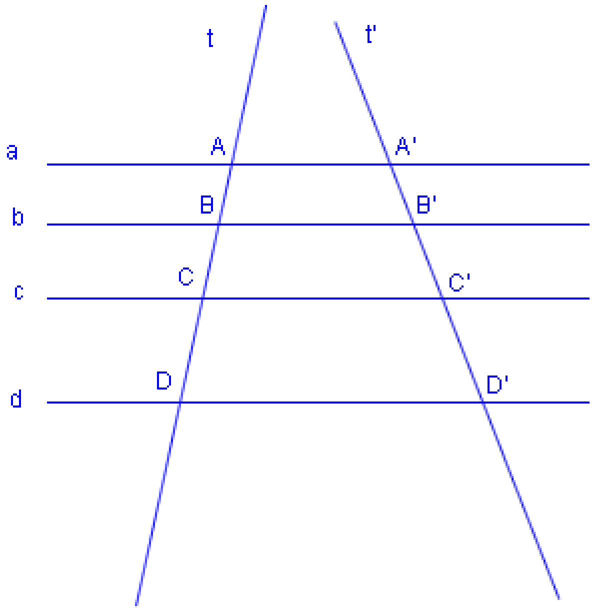
In un triangolo rettangolo, il *quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* ossia

$$CH^2 = AH \cdot BH$$

Teorema di Talete[31]

Un fascio di rette parallele intersecate da due trasversali determina su una trasversale segmenti direttamente proporzionale ai segmenti corrispondenti dell'altra trasversale ossia

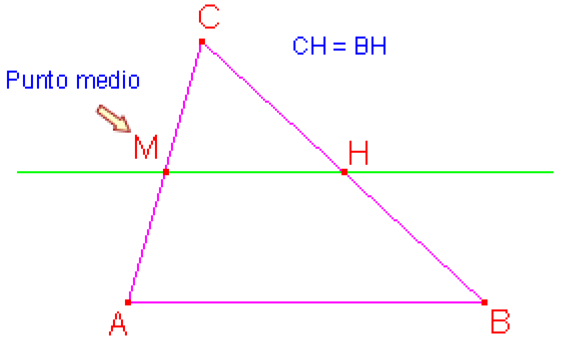
$$AB : AC = A'B' : A'C'$$



Conseguenze:

a) Ogni parallela ad un lato di un triangolo che intersechi gli altri due, divide i lati intersecati in segmenti direttamente proporzionali.

b) La parallela ad un lato di un triangolo passante per il punto medio di un altro lato, divide il terzo lato in due segmenti congruenti

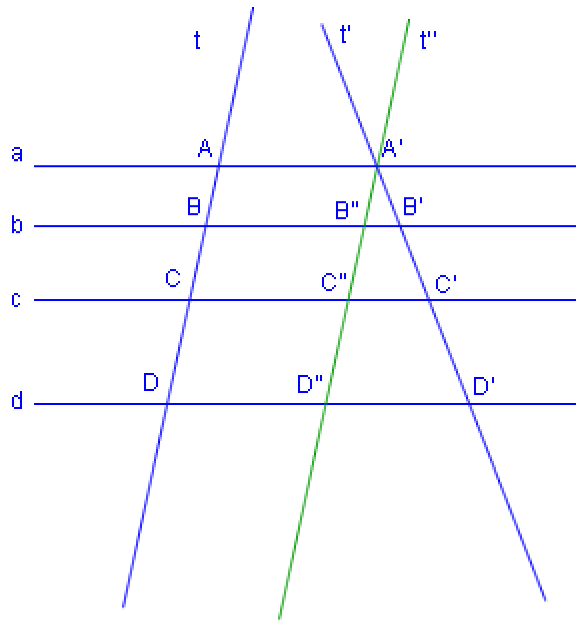


[30] Vedi negli [argomenti di aritmetica]()

[31] Da fare in terza. Talete di Mileto, filosofo greco (640 a.C./624 a.C. - circa 547 a.C.)

Dimostrazione del teorema

Si traccia la retta t'' parallela a t e passante per A' e intersecante le parallele in B'', C'' e D'' e si considerano i triangoli A' B'' B' e A' C'' C' . I due triangoli sono simili per il 1° criterio di congruenza dei triangoli in quanto hanno:



a) l'angolo $\widehat{A'}$ in comune;
b) gli angoli $\widehat{B''} = \widehat{C''}$ e $\widehat{B'} = \widehat{C'}$ congruenti perché angoli corrispondenti di rette parallele tagliate da una trasversale.

Quindi

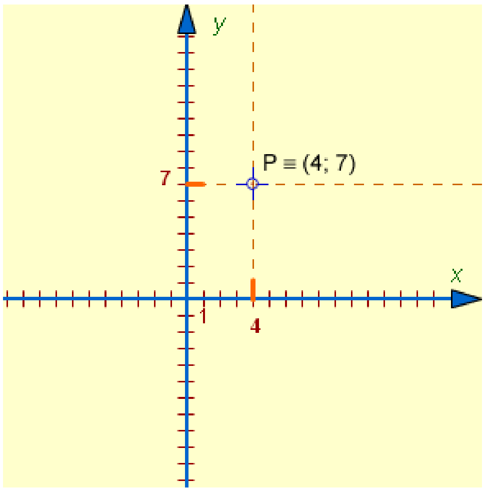
$$A'B'':A'C'' = A'B':A'C'$$

ma $A'B'' = AB$ e $A'C'' = AC$

allora $AB:AC = A'B':A'C'$ che è il teorema di Talete.

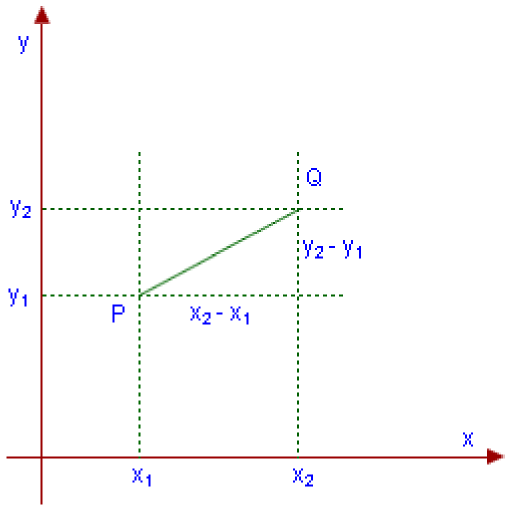
APPENDICE

Il piano cartesiano



Un *piano cartesiano* è caratterizzato da un *sistema di riferimento* costituito da una *coppia di rette orientate perpendicolari* (*ortogonali*). Il punto d'intersezione delle rette viene detto *origine* e ogni retta viene *graduata* per mezzo di un'*unità di misura*, partendo dall'origine. L'asse orizzontale *(asse delle ascisse*) è graduato verso destra (*positivo*) e verso sinistra (*negativo*); l'asse verticale *(asse delle ordinate*) è graduato verso l'alto (positivo) e verso il basso (negativo). Ogni punto P del piano cartesiano è individuata da una coppia ordinata di numeri (*x*, *y*), le *coordinate del punto* , dove *x* indica la distanza dall'asse y (detta *ascissa* o *coordinata x*) e *y* quella dall'asse x (detta *ordinata* o *coordinata y*).

Distanza tra due punti nel piano cartesiano



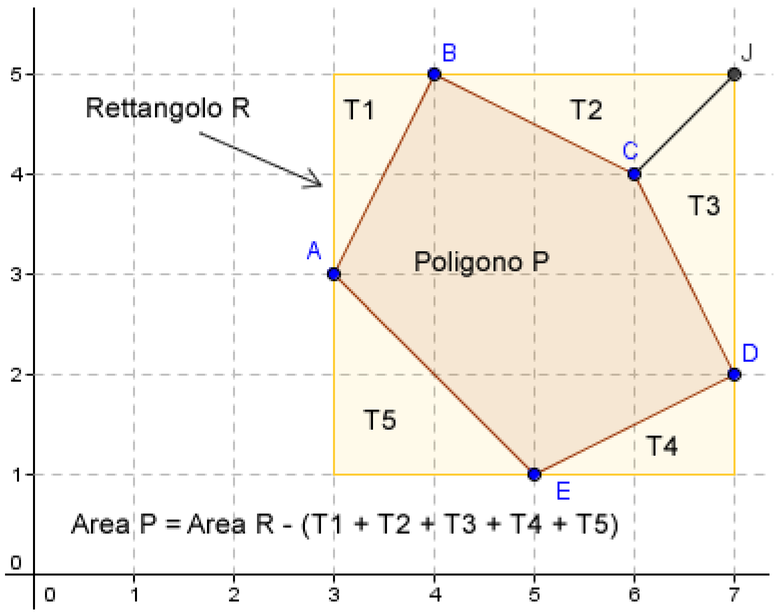
La distanza *d* tra due punti $P(x_1; y_1\ )$e $Q(x_2; y_{12}\ )$ è data dalla lunghezza del segmento PQ e si calcola in questi modi:

a) PQ parallelo all'asse *x*: $d = x_2 - x_1$
b) PQ parallelo all'asse *y*: $d = y_2 - y_1$
c) PQ non parallelo agli assi[32]: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Queste regole si applicano anche al calcolo della misura dei lati di un poligono i cui vertici sono punti del piano cartesiano e di conseguenza anche al calcolo del perimetro.

L'area di poligono convesso nel piano cartesiano può essere calcolata in questo modo:

a) Si calcola l'area del rettangolo i cui lati contengono i vertici più "esterni" del poligono
b) Si sottrae dall'area del rettangolo la somma delle aree dei triangoli che si formano come differenza tra la superficie del rettangolo e quella del poligono



[32] Si applica il teorema di Pitagora. Vedi anche http://www.gpmeneghin.com/schede/analitica/segm.htm.