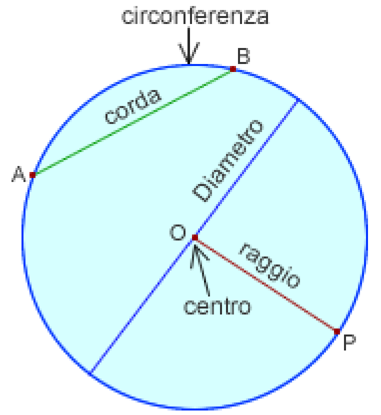
Il cerchio e la circonferenza

DEFINIZIONI



Circonferenza: linea curva chiusa i cui punti sono equidistanti da un punto O detto centro della circonferenza.

Raggio: un qualsiasi segmento che unisce il centro O della circonferenza ad un punto della circonferenza stessa. Tutti i raggi di una determinata circonferenza hanno la stessa lunghezza e sono infiniti

Corda: segmento che unisce due punti di una circonferenza.

Diametro: segmento che unisce due punti di una circonferenza passando per il suo centro O. È la corda di lunghezza massima. Tutti i diametri di una determinata circonferenza hanno la stessa lunghezza e sono infiniti.

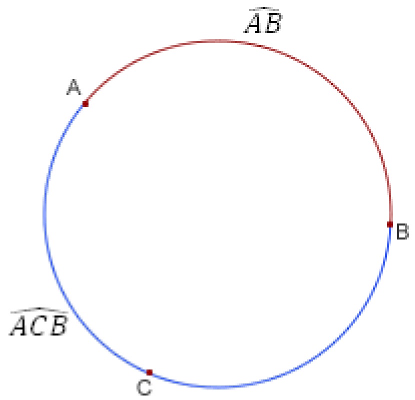
Il diametro di una determinata circonferenza ha lunghezza doppia rispetto a quella del raggio

$$d = 2 \cdot r \qquad r = \frac{d}{2}$$

Cerchio: parte di piano costituita da una circonferenza e dai punti interni ad essa[1].

PARTI DELLA CIRCONFERENZA

Archi di circonferenza



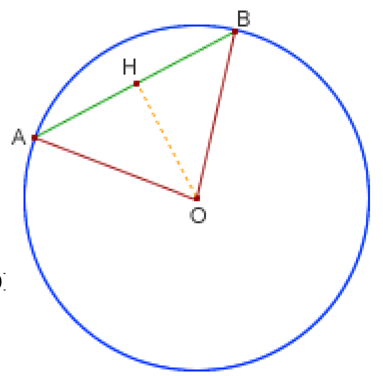
Una coppia qualsiasi di punti A e B presi sulla circonferenza la divide in due parti dette **archi** di cui A e B sono gli estremi. L'arco di lunghezza minore si indica con $\widehat{AB}$ o se si vuole indicare l'arco di lunghezza maggiore si utilizza una lettera intermedia, per esempio $\widehat{ACB}$.
Se i punti A e B determinano due archi di uguale lunghezza si parla di **semicirconferenze**.

Gli estremi di una corda AB determinano due archi e si dice che l'arco $\widehat{AB}$ **sottende** la corda AB oppure che AB e $\widehat{AB}$ sono corrispondenti.

Corde

T1. La perpendicolare condotta dal centro O della circonferenza ad una corda AB divide la corda in due parti uguali[2].

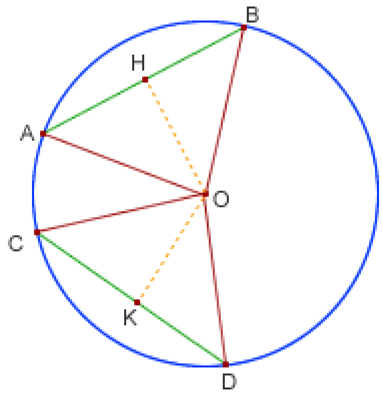
Dimostrazione
OA = OB perché raggi della circonferenza quindi il triangolo AOB è isoscele;



[1] Se si considerano solo i punti che hanno una distanza dal centro O minore di quella del raggio (O

[2] La lettera T indica che si tratta di un teorema (vedi il prontuario geometria 1)

OH rappresenta l'altezza del triangolo AOB che nei triangoli isosceli coincide con la mediana quindi AH = BH



Il segmento OH rappresenta la **distanza** della corda dal centro della circonferenza.

T2. Due corde congruenti AB e CD hanno la medesima distanza dal centro.

Dimostrazione
I triangoli AOB e COD sono congruenti in quanto:
AO = BO = CO = DO perché raggi della circonferenza e AB = CD;
quindi OH = OK perché altezze dei due triangoli.

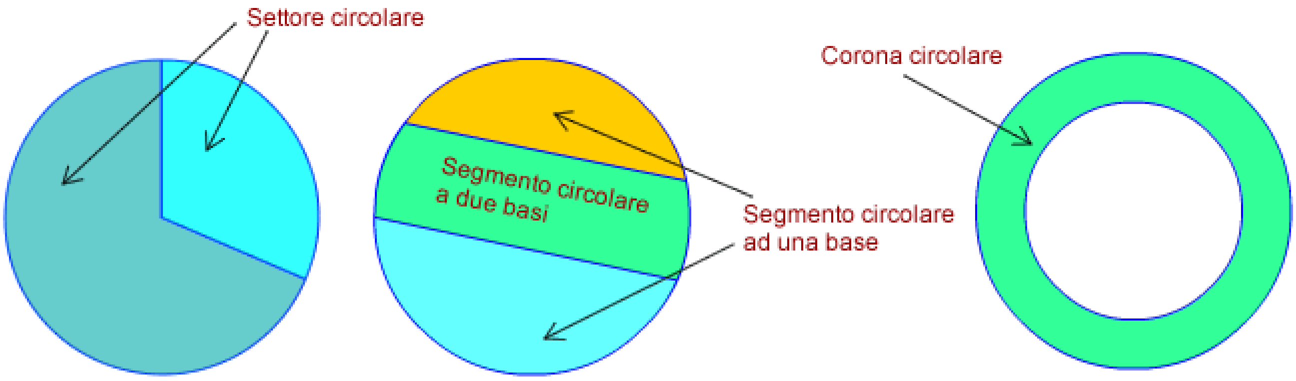
T3. Archi di circonferenza congruenti sottendono corde congruenti.

PARTI DEL CERCHIO

Un **settore circolare** è una parte di cerchio delimitata da due raggi e da un arco di circonferenza. Quando i due raggi si trovano sulla stessa retta abbiamo un **semicerchio**.

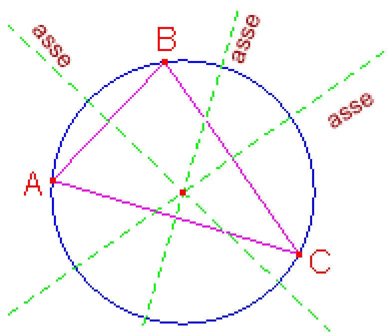
La porzione di cerchio delimitata da una corda e da un arco di circonferenza è detta **segmento circolare ad una base**. La parte di cerchio compresa tra due corde parallele è detta **segmento circolare a due basi**.

La parte di cerchio compresa tra due circonferenza concentriche è detta **corona circolare**.



RELAZIONI TRA PUNTI, RETTE E CIRCONFERENZE

Relazione tra punti del piano e la circonferenza



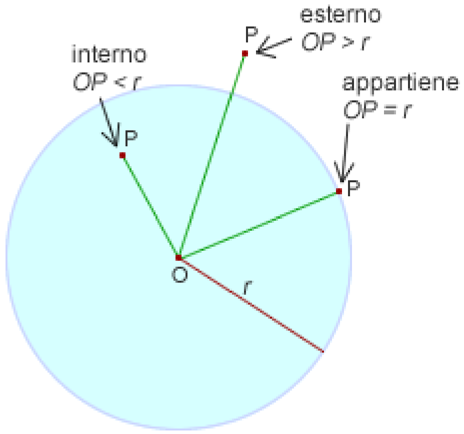
Per un punto o due punti del piano passano infinite circonferenze. Per t**re punti non allineati passa una ed una sola circonferenza**, il cui centro corrisponde all'intersezione degli assi dei segmenti che congiungono i punti.

Discussione
Tre punti A, B, C non allineati possono essere considerati come vertici del triangolo ABC e il centro dell'unica circonferenza passante per i tre punti coincide con il **circoncentro**[3] del triangolo.

[3] Ricorda che il circocentro è equidistante dai vertici del triangolo (vedi geometria 1)

Un punto P del piano del piano complanare alla circonferenza può:

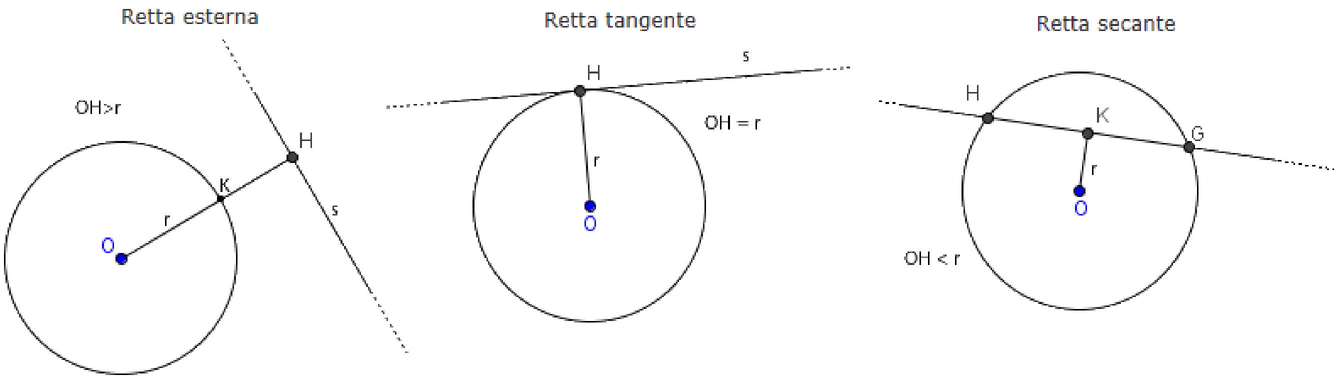
- ✓ essere **esterno** alla circonferenza se la sua distanza dal centro O è maggiore del raggio.
  $OP > r$
- ✓ **appartenere** alla circonferenza se la sua distanza dal centro O è uguale al raggio.
  $OP = r$
- ✓ essere **interno** alla circonferenza se la sua distanza dal centro O è minore del raggio.
  $OP < r$



<u>Relazione tra retta e circonferenza</u>

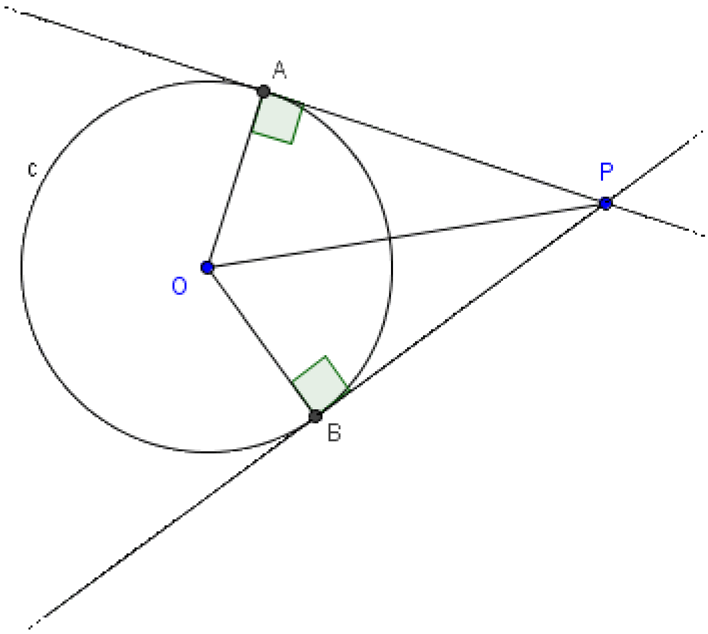
Le posizioni di una retta e di una circonferenza che giacciono sullo stesso piano sono le seguenti:

- *retta esterna*: non ha punti in comune con la circonferenza; la distanza della retta dal centro della circonferenza è maggiore del raggio
- *retta tangente*: ha uno ed uno solo punto in comune con la circonferenza (**punto di tangenza**); la distanza della retta dal centro della circonferenza è uguale del raggio e **il raggio è perpendicolare alla retta nel punto di tangenza**
- *retta secante*: ha due punti in comune con la circonferenza; la distanza della retta dal centro della circonferenza è minore del raggio



Data una circonferenza *c* ed un punto P esterno ad essa per P passano due sole tangenti alla circonferenza data. La distanza di P da ciascun punto di tangenza è la stessa.

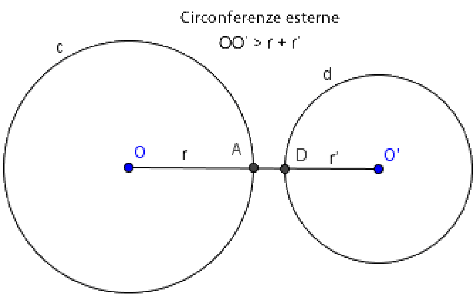
I segmenti AP e BP sono congruenti in quanto i triangoli OAP e OBP sono congruenti in quanto rettangoli: infatti hanno congruente l'ipotenusa OP, in comune, e i cateti OA e OB in quanto raggi della circonferenza (3° criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

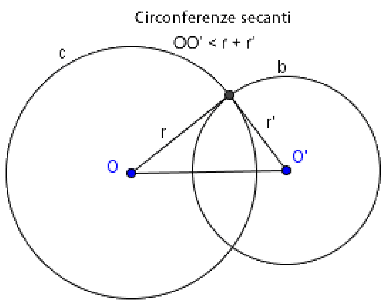


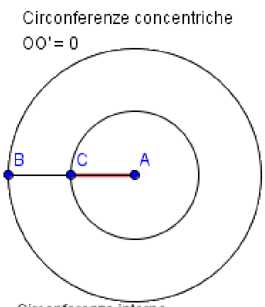
Rapporto tra circonferenze

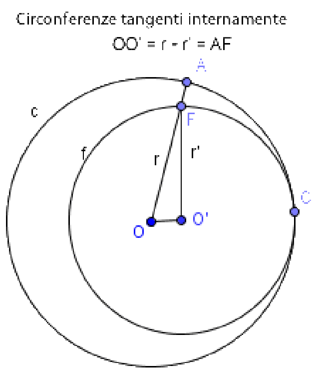
Due circonferenze possono essere:

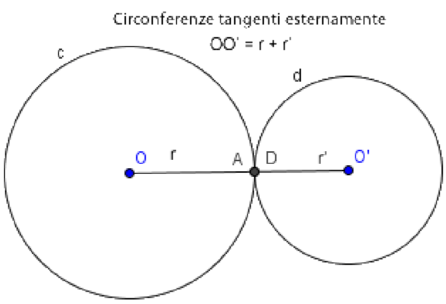
- *esterne*: la distanza tra i due centri è maggiore della somma dei due raggi ($\overline{OO'} > r + r_1$)
- *interne*: la distanza tra i due centri è minore della differenza tra i due raggi ($\overline{OO'} < r - r_1$) ma maggiore di 0
- *concentriche*: la distanza tra i due centri è 0 ($\overline{OO'} = 0$) ossia i centri delle circonferenze coincidono
- *secanti*: la distanza fra i due centri è inferiore al valore della somma dei due raggi e superiore alla loro differenza ($r + r_1 > \overline{OO'} > r - r_1$)
- *Tangenti esternamente*: la distanza tra i centri è uguale alla somma dei raggi. Hanno un solo punto in comune (punto di tangenza) ($\overline{OO'} = r + r_1$)
- *Tangenti internamente*: la distanza tra i centri è uguale alla differenza tra i raggi. Hanno un solo punto in comune (punto di tangenza) ($\overline{OO'} = r - r_1$)

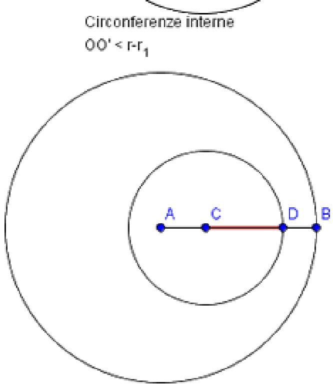




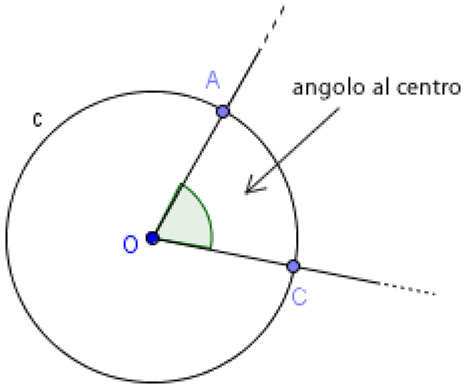






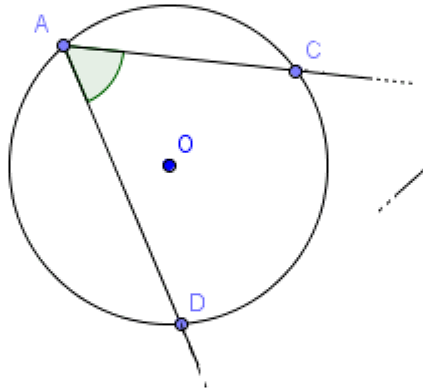


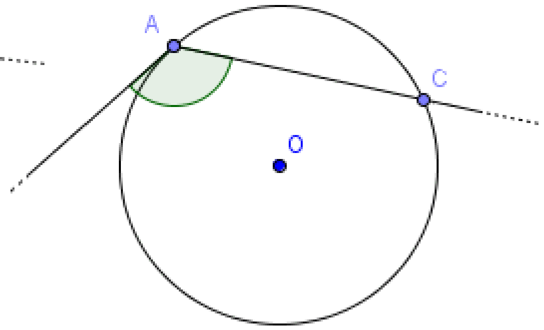
ANGOLI



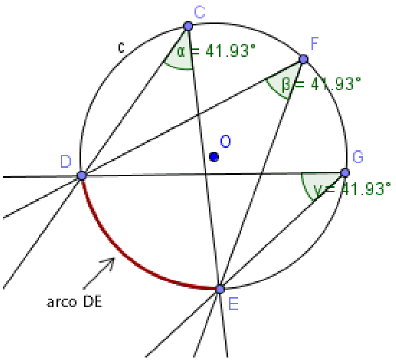
Angolo al centro: è l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e per lati due semirette che intersecano la circonferenza formando un arco di circonferenza. L'intersezione dell'angolo al centro con il cerchio è un settore circolare.

Angolo alla circonferenza: ha il vertice sulla circonferenza e i lati sono secanti alla circonferenza o uno secante e l'altro tangente alla circonferenza.



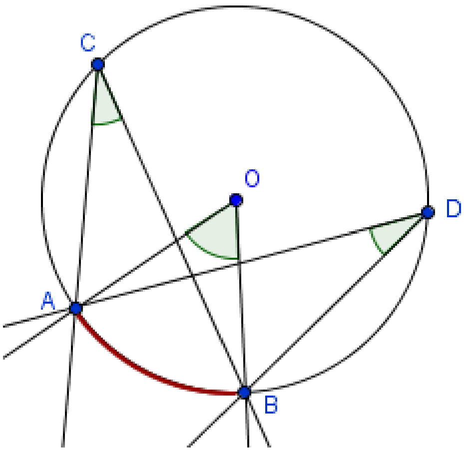


Dato un arco di circonferenza a questo corrispondono infiniti angoli alla circonferenza, congruenti tra loro.

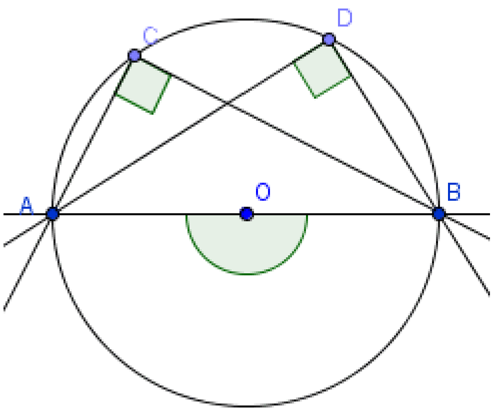


Un angolo al centro e un angolo alla circonferenza che insistono sullo *stesso arco di circonferenza* si dicono *corrispondenti* e **l'angolo al centro ha un'ampiezza doppia rispetto al suo corrispondente alla circonferenza**[4].

Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti in quanto l'ampiezza di ognuno è la metà del suo corrispondente angolo al centro che è in comune a tutti.



Angoli alla circonferenza che insistono su una semi circonferenza sono **retti** in quanto la loro ampiezza è la meta del corrispondente angolo al cento che è un angolo piatto.



[4] Vedi Appendice per la dimostrazione

LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA

Rapporto tra circonferenza e diametro (π)

Il rapporto tra circonferenza *c* e diametro *d* è dato dal numero di volte in cui il diametro è contenuto nella circonferenza del cerchio a cui appartiene; si nota che qualsiasi sia la circonferenza, il diametro è contenuto più di tre ma meno di quattro volte ossia, in termini matematici

$$3 < \frac{c}{d} < 4$$

Circonferenza e diametro sono **segmenti incommensurabili** ossia non è possibile trovare un sottomultiplo comune con cui posso esprimere la misura di ciascuno di essi. La conseguenza è che il rapporto tra circonferenza e suo diametro non può essere espresso da una frazione per cui questo rapporto è un **numero irrazionale**.

Il rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio viene indicato con la lettera greca π[5] (pi greco).

In molti calcoli si usa il valore approssimato 3,14 ($\frac{157}{50}$) come valore approssimato al centesimo; finora sono state calcolate quasi cinque miliardi di cifre decimali

Il rapporto tra circonferenza c di un cerchio e suo diametro d è π: da questo si ricava che moltiplicando il diametro di una circonferenza per π si ottiene la misura della circonferenza; in termini matematici

$$\frac{c}{d} = \pi \rightarrow c = d \cdot \pi$$

Il diametro è il doppio del raggio r della circonferenza per cui si può utilizzare anche questa formula

$$c = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Il valore approssimato di π da utilizzare dipende dalla precisione nel calcolo della circonferenza che voglio ottenere, di solito si usa il valore 3,14; molte volte conviene lasciare indicato il simbolo π accanto al valore numerico tenendo sempre presente che quel valore deve essere più che triplicato.

Data la circonferenza il diametro si ricava dividendo la circonferenza per π e il raggio dividendola per 2π.

$$d = \frac{c}{\pi} \qquad r = \frac{c}{2 \cdot \pi}$$

La lunghezza di un arco di circonferenza dipenda da due fattori: l'angolo al centro che lo determina e la lunghezza del raggio della circonferenza.

Calcolo dell'arco di circonferenza

Considerando che ad un angolo al centro di 360° corrisponde l'intera circonferenza *c* ($c = 2 \cdot r \cdot \pi$) e che un qualsiasi angolo α al centro è una frazione *f* di 360° anche la lunghezza *l* dell'arco che gli corrisponde sarà la stessa frazione *f* di circonferenza, per cui si può scrivere la proporzione seguente

$$\boldsymbol{\alpha : 360° = l : 2r\pi}$$ [6]

[5] Dato che π non deriva da una radice viene detto **numero trascendente**
[6] $2r\pi$ è la circonferenza

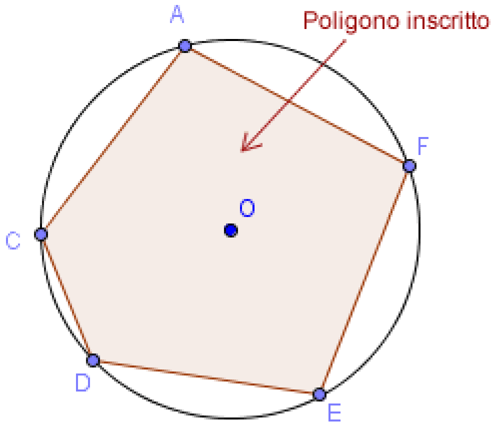
da cui si ricava che

$$l = \frac{\alpha \cdot 2r\pi}{360°}$$

Si ricavano anche le seguenti formule

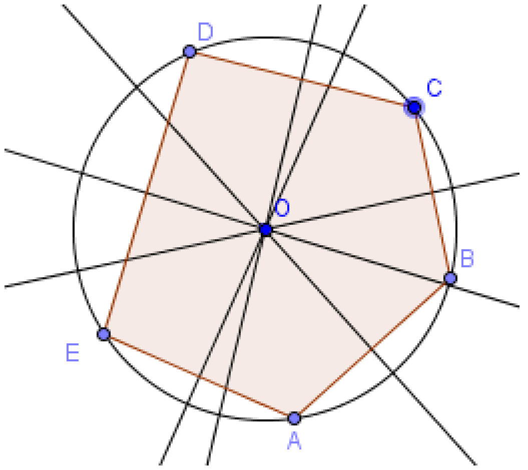
$$\alpha = \frac{360° \cdot l}{2r\pi} \qquad c^7 = \frac{l \cdot 360°}{\alpha}$$

POLIGONI INSCRITTI O CIRCOSCRITTI AD UNA CIRCONFERENZA



Poligoni inscritti ad una circonferenza

Un poligono si dice **inscritto** ad una circonferenza quando *tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza*; si dice che la *circonferenza è circoscritta* al poligono.



Condizione di inscrivibilità: *Un poligono è inscrittibile in una circonferenza se gli assi dei suoi lati s'incontrano in un unico punto, detto circocentro del poligono (ossia il centro della circonferenza da circoscrivere).*

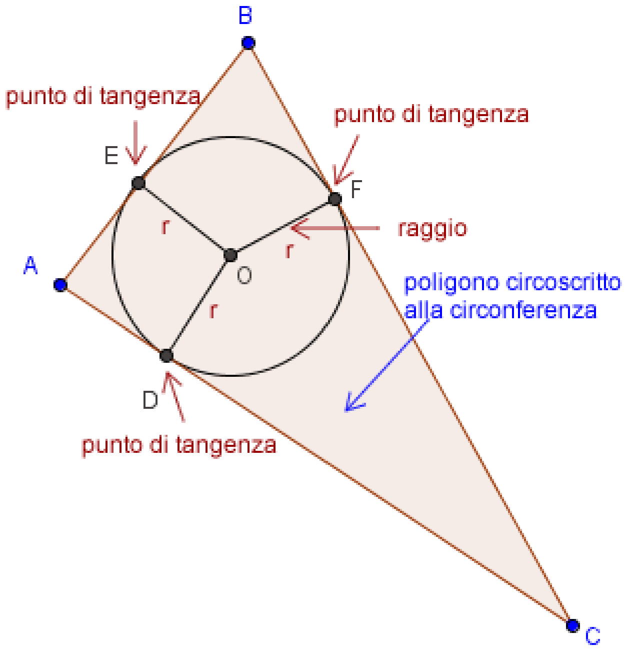
In base alla condizione di inscrivibilità sono sicuramente inscrivibili ad una circonferenza:

- qualsiasi tipo di triangolo
- qualsiasi poligono regolare
- qualsiasi quadrilatero in cui la somma degli angoli opposti sia un angolo piatto (di conseguenza, rettangolo, quadrato e trapezio isoscele sono sempre inscrittibili ad una circonferenza)

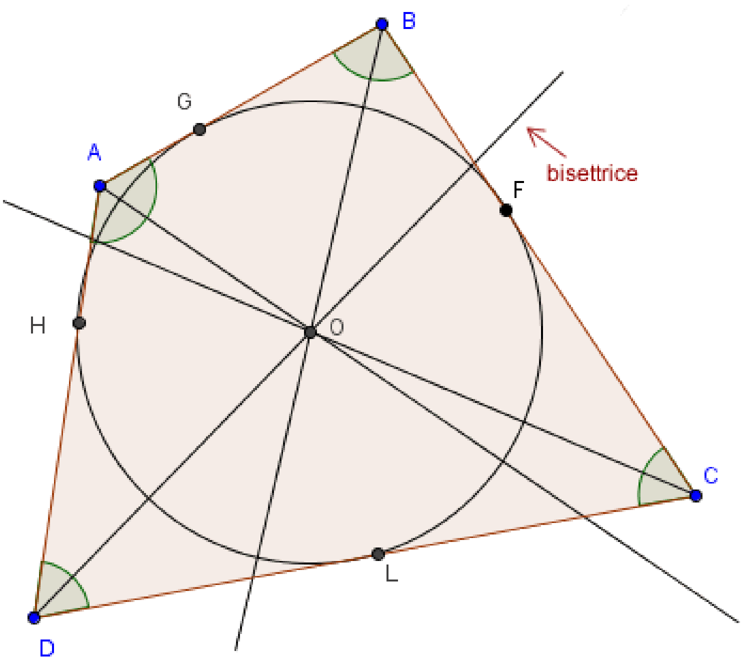
[7] A c corrisponde $2r\pi$

Poligoni circoscritti ad una circonferenza

Un poligono è circoscritto ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza; la circonferenza è inscritta al poligono.



Condizione di circoscrittibilità: *un poligono è circoscrittibile in una circonferenza se le bisettrici dei suoi angoli s'incontrano in un unico punto, detto incentro del poligono (ossia il centro della circonferenza inscritta).*

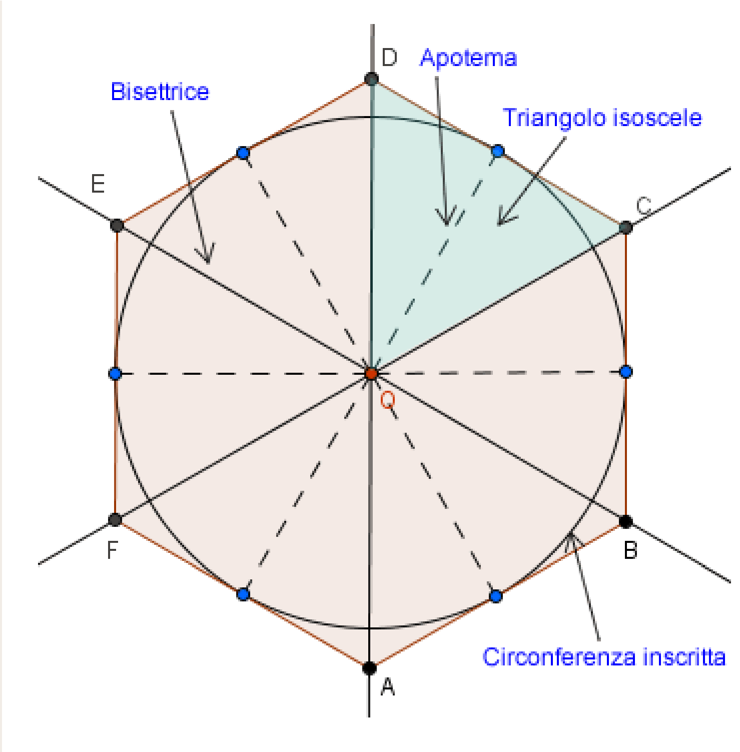


In base alla condizione di circoscrittibilità sono circoscrivibili ad una circonferenza:

- tutti i triangoli
- i poligoni regolari
- i quadrilateri in cui la somma delle lunghezze dei lati opposti è la stessa ossia dato un quadrilatero ABCD AB + CD = AD + BC

Poligoni regolari inscritti o circoscritti ad una circonferenza

Un poligono è regolare quando ha i lati e gli angoli congruenti; esso è circoscrivibile in quanto le bisettrici degli angoli interni si incontrano in un unico punto e inscrittibile ad una circonferenza in quanto gli assi dei suoi lati si incontrano in un unico punto.
Viene detto **apotema** il *raggio della circonferenza inscritta al poligono regolare* che *rappresenta la distanza del lato del poligono rispetto al suo centro*; quando tracciamo le bisettrici degli angoli interni del poligono regolare questo viene s*uddiviso in triangoli isosceli congruenti* di cui lo apotema rappresenta l'altezza.
Gli *apotemi di un poligono regolare sono congruenti*.



Perimetro e area di un poligono regolare

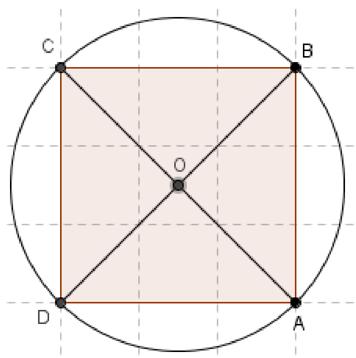
Il perimetro di un poligono regolare si calcola moltiplicando la lunghezza *l* del lato per il numero *n* di lati.

$$2p = l \cdot n$$

L’area di un poligono regolare si trova moltiplicando il perimetro del poligono per il suo apotema e dividendo per 2

$$A = \frac{2p \cdot a}{2}$$

Quadrato inscritto ad una circonferenza



Quando un quadrato è inscritto ad una circonferenza la sua diagonale è uguale al diametro della circonferenza.

Rapporto tra diametro (diagonale del quadrato) *d* della circonferenza e lato *l*

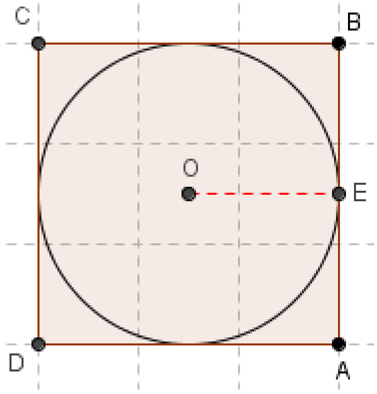
$$d_{diametro\ o\ diagonale} = l_{quadrato} \cdot \sqrt{2} \qquad r_{raggio} = \frac{l_{quadrato} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Relazione inversa

$$l_{quadrato} = \frac{d_{diametro\ o\ diagonale}}{\sqrt{2}} \ oppure\ \ l = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Quadrato circoscritto ad una circonferenza

Il lato di un quadrato circoscritto ad una circonferenza (o circonferenza inscritta ad un quadrato) è congruente al diametro della circonferenza



Rapporto tra raggio *r* e lato del quadrato *l*

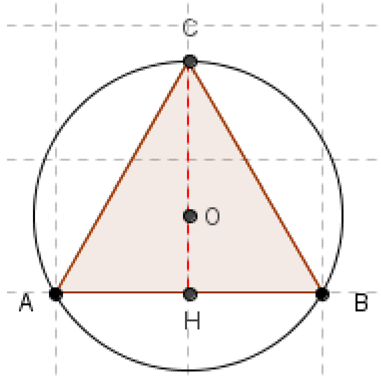
$$l = 2 \cdot r \qquad r = \frac{l}{2}$$

Relazione tra diagonale *d* e raggio *r*

$$d_{quadrato} = 2 \cdot r \cdot \sqrt{2} \quad r = \frac{d_{quadrato}}{2\sqrt{2}} \ oppure\ r = \frac{d_{quadrato}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{d_{quadrato} \cdot \sqrt{2}}{4}$$

Triangolo equilatero inscritto ad una circonferenza

Il *baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra*; nel caso del triangolo equilatero questo vale anche per le altezze per cui



$$CO = 2 \cdot OH$$

per cui

$$CH = 3 \cdot OH \ oppure\ CO = \frac{2}{3} CH$$

Dato che CH è l'altezza del triangolo equilatero e OC il raggio della circonferenza possiamo scrivere

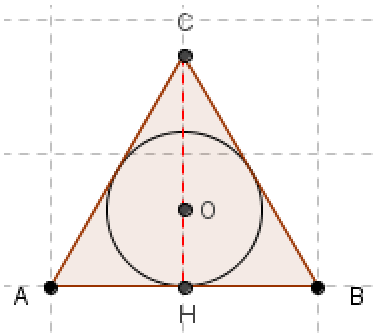
$$r = \frac{2}{3} h \ oppure\ h = \frac{3}{2} r$$

Relazione tra lato *l* del triangolo equilatero e raggio *r*[8]

$$l = r \cdot \sqrt{3} \qquad r = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3} \quad ossia\ r = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}$$

[8] Vedi Appendice sul triangolo equilatero

Triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza



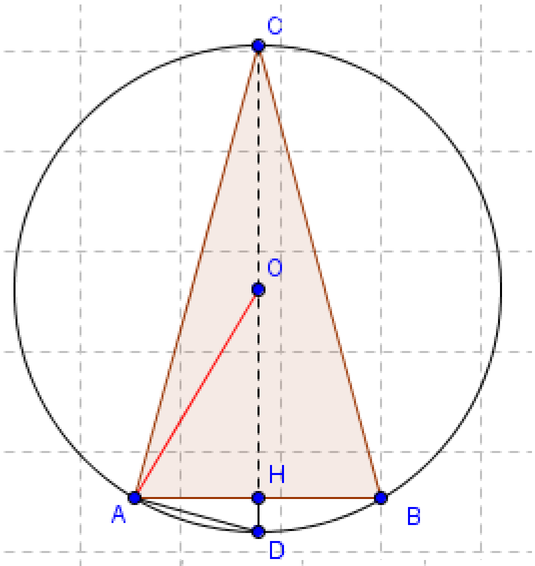
Per il triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza valgono le stesse relazioni viste per triangolo equilatero inscritto per cui dato che OH è il raggio *r* e CH l'altezzza *h* abbiamo

$$r = \frac{1}{3} h \; oppure \; h = \; 3r$$

Relazione tra lato *l* del triangolo equilatero e raggio *r*[9]

$$l = 2r\sqrt{3}$$

Triangolo isoscele inscritto ad una circonferenza



Il triangolo ADC è rettangolo perché insiste su una semicirconferenza: CD è l'ipotenusa, AD e AC sono i cateti e AH l'altezza relativa all'ipotenusa, Per il 1° teorema di Euclide[10] possiamo scrivere

AC : CD = CD : CH[11]

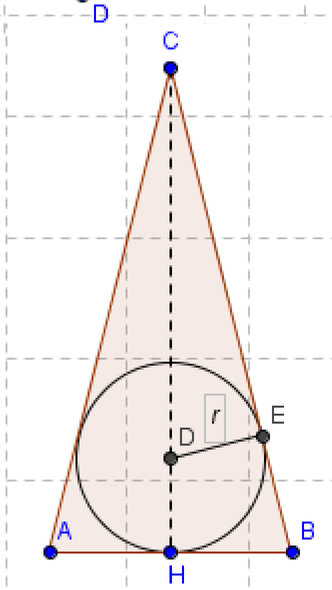
Poiché CD è il diametro *d* della circonferenza (o il doppio del raggio) e ipotenusa del triangolo ACD, possiamo scrivere che

AC : d = d : CH

Da cui

$$d = \sqrt{AC \cdot CH}$$

Triangolo isoscele circoscritto ad una circonferenza[12]



Se indico con *r* il raggio della circonferenza inscritta, con *l* uno dei due lati congruenti del triangolo isoscele, con *b* la base del triangolo e con *h* l'altezza si ha

$$r = \frac{\frac{b}{2} \cdot \left(l - \frac{b}{2}\right)}{h}$$

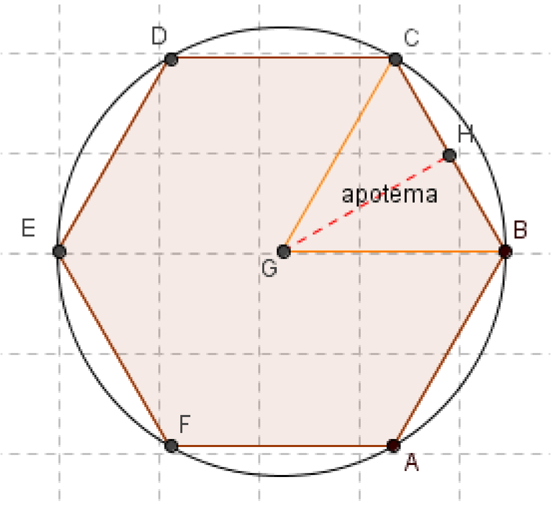
e anche che

$$h = \frac{\frac{b}{2} \cdot \left(l - \frac{b}{2}\right)}{r}$$

[9] Vedi Appendice sul triangolo equilatero
[10] L'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[11] Altezza del triangolo
[12] Vedi dimostrazione in appendice

Esagono regolare inscritto ad una circonferenza

Nell'esagono regolare inscritto ad una circonferenza il lato *l* di esso è uguale al raggio *r* .



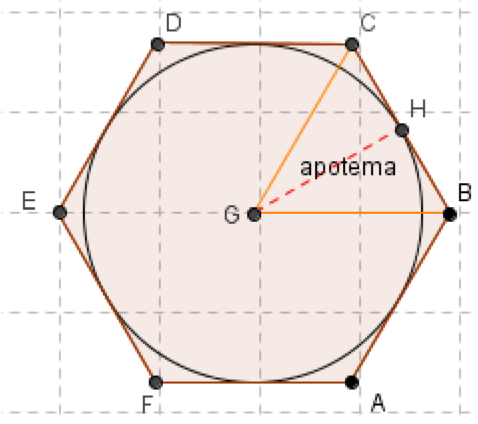
L'apotema dell'esagono si ottiene applicando al triangolo HBO (il triangolo CBO è equilatero) il teorema di Pitagora da cui si ricava che

$$a = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$r = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Esagono regolare circoscritto ad una circonferenza

Nell'esagono regolare circoscritto ad una circonferenza l'apotema *a* di esso è uguale al raggio *r* .



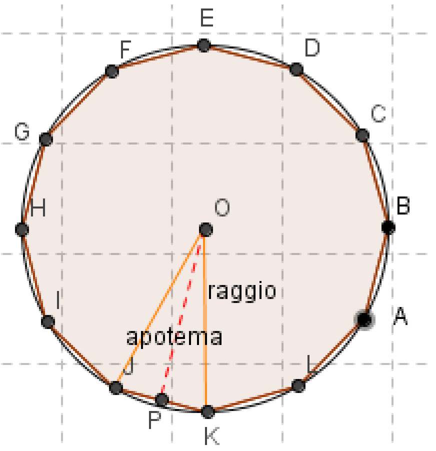
Il lato dell'esagono si ottiene applicando al triangolo HBG (il triangolo CBG è equilatero) il teorema di Pitagora da cui si ricava che

$$r = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$l = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Area del cerchio

La formula dell'area del cerchio si trova facendo riferimento a quella dell'area dei poligoni regolari



$$(1)\ A = \frac{2p \cdot a}{2}$$

Dove *2p* rappresenta il perimetro del poligono e *a* il suo apotema.

Se immaginiamo di inscrivere ad una circonferenza poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati (6, 8, 12, 32…) osserveremo che il perimetro di questi poligoni si avvicina sempre di più alla misura della circonferenza del cerchio e gli apotemi tendono a diventare uguali al raggio del cerchio. In questo modo l'area del poligono tende a coincidere con quella del cerchio. Nella formula (1) 2p coincide con la circonferenza e a con il raggio del cerchio per cui l'area del cerchio si calcola

$$A = \frac{\cancel{2}r\pi \cdot r}{\cancel{2}} = \boldsymbol{r^2 \cdot \pi}$$

e, viceversa il raggio, data l'area si trova

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Area del settore circolare

Utilizzando la proporzione data per la misura dell'arco di circonferenza, sostituendo alla misura della circonferenza quella dell'area del cerchio abbiamo

$$\boldsymbol{\alpha : 360° = A_s : r^2\pi}$$

da cui si ricava che

$$A_s = \frac{\alpha \cdot r^2\pi}{360°}$$

Si ricavano anche le seguenti formule

$$\alpha = \frac{360° \cdot A_s}{r^2\pi} \qquad A_c{}^{13} = \frac{A_s \cdot 360°}{\alpha}$$

Area del segmento circolare ad una base

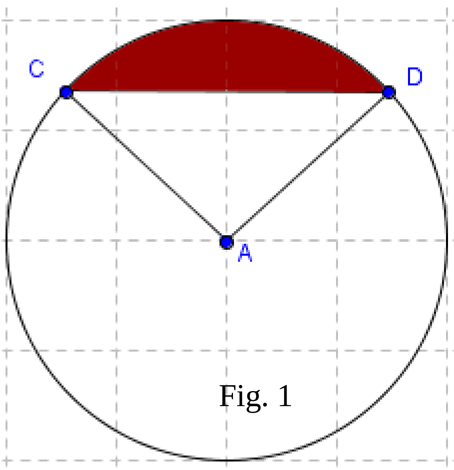


Fig. 1

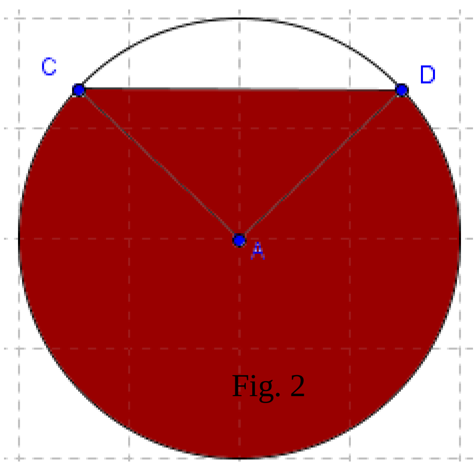


Fig. 2

Se il segmento circolare è minore di un semicerchio (fig. 1) l'area si ottiene sottraendo a quella del settore circolare $\widehat{CAD}$ l'area del triangolo isoscele CAD.

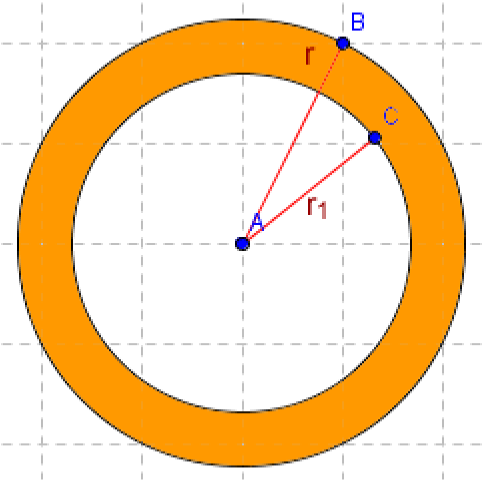
Se il segmento circolare è maggiore di un semicerchio (fig. 2) l'area si ottiene addizionando a quella del settore circolare $\widehat{CAD}$ l'area del triangolo isoscele CAD

[13] A A_c corrisponde $r^2\pi$

Area della corona circolare

L'Area della corona circolare si calcola facendo la differenza tra le aree dei due cerchi.

$$A_{corona} = (r^2 - {r_1}^2) \cdot \pi$$



APPENDICE

Rapporto tra angolo al centro e angolo alla circonferenza che insistono sullo stesso arco

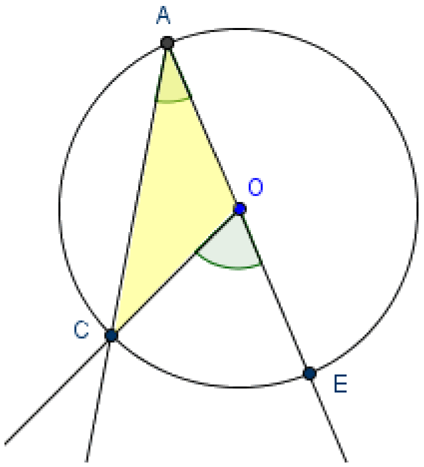
La dimostrazione di questa affermazione si differenzia a seconda se i lati dell'angolo alla circonferenza siano secanti alla circonferenza e il centro di essa si trovi:

a) su uno dei lati dell'angolo alla circonferenza
b) all'interno dell'angolo alla circonferenza
c) esternamente dell'angolo alla circonferenza

La dimostrazione non riguarda il caso in cui uno dei lati sia tangente alla circonferenza .

Caso 1

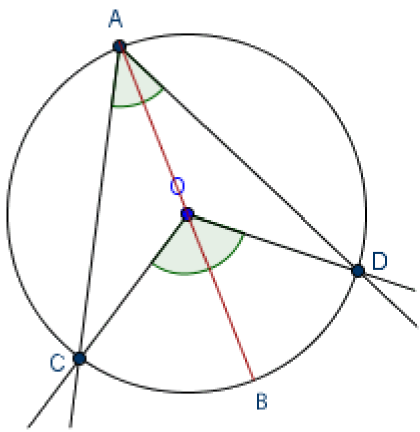
Dimostrazione



1. Il triangolo AOC è un triangolo isoscele perché i lati OA e OC sono congruenti in quanto raggi della circonferenza.
2. L'angolo $C\hat{O}E$ è esterno al triangolo AOC e in un triangolo l'angolo esterno è uguale alla somma delle ampiezze degli angoli interni non adiacenti ad esso per cui
$$C\hat{O}E = O\hat{C}A + C\hat{A}O$$
3. Ma $O\hat{C}A$ e $C\hat{A}O$ sono congruenti perchè angoli adiacenti al lato non congruente di un triangolo isoscele per cui possiamo concludere che
$$C\hat{O}E = 2 \times C\hat{A}O$$
e possiamo concludere che *l'ampiezza di un angolo al centro è il doppio di quella del corrispondente angolo alla circonferenza*.

Caso 2

Dimostrazione



Tracciamo il diametro AB che divide in due parti gli angoli $C\hat{O}D$ e $C\hat{A}D$, formando due triangoli AOC e AOD, entrambi isosceli per le ragioni viste nel Caso 1 e due archi CB e BD sui quali insistono rispettivamente gli angoli $C\hat{O}B$ e il suo corrispondente alla circonferenza $C\hat{A}B$ e $B\hat{O}D$ e il suo corrispondente alla circonferenza $B\hat{A}D$

a) l'angolo $C\hat{O}B$ è esterno al triangolo AOC e, per quanto visto nel Caso 1, possiamo scrivere
$$C\hat{O}B = O\hat{C}A + C\hat{A}O = 2 \times C\hat{A}O$$
b) lo stesso ragionamento può essere applicato all'angolo $B\hat{O}D$
$$B\hat{O}D = O\hat{A}D + O\hat{D}A = 2 \times O\hat{A}D$$
c) ma $C\hat{O}D = C\hat{O}B + B\hat{O}D$ e sostituendo a $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}D$ il loro valore rispetto ai corrispondenti angoli alla circonferenza otteniamo
$$C\hat{O}D = 2 \times C\hat{A}O + 2 \times O\hat{A}D$$
e, applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione,

$$C\hat{O}D = 2 \times \left(C\hat{A}O + O\hat{A}D\right)$$

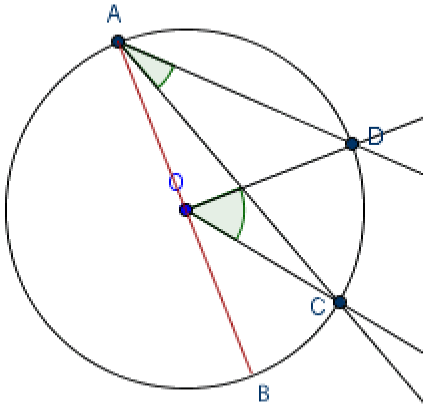
d) ma $C\hat{A}O + O\hat{A}D = C\hat{A}D$ ossia l'angolo alla circonferenza che corrisponde a $C\hat{O}D$, angolo al centro
e) per cui possiamo scrivere che

$$C\hat{O}D = 2 \times C\hat{A}D$$

concludendo che anche in questo caso *l'ampiezza di un angolo al centro è il doppio di quella del corrispondente angolo alla circonferenza*.

Caso 3

Dimostrazione



Tracciamo il diametro AB in modo che B sia esterno all'arco CD; otteniamo due archi BC e BD. All'arco BC corrispondono i due angoli $B\hat{O}C$, angolo al centro e $B\hat{A}C$, corrispondente alla circonferenza e il centro della circonferenza si trova sul lato AB comune ai due angoli mentre all'arco BD corrispondono i due angoli $B\hat{O}D$, angolo al centro e $B\hat{A}D$, corrispondente alla circonferenza e il centro della circonferenza si trova sul lato AB comune ai due angoli.
Facendo riferimento al Caso 1 abbiamo che:

a) $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C$ che insistono sull'arco BC
b) $B\hat{O}D = 2 \times B\hat{A}D$ che insistono sull'arco BD

L'angolo $C\hat{O}D$ è la differenza tra l'angolo $B\hat{O}D$ e l'angolo $B\hat{O}C$ ossia

$$C\hat{O}D = B\hat{O}D - B\hat{O}C$$

Sostituendo a $B\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ il loro valore rispetto ai loro corrispondenti angoli alla circonferenza otteniamo

$$C\hat{O}D = 2 \times B\hat{A}D - 2 \times B\hat{A}C$$

Applicando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione

$$C\hat{O}D = 2 \times \left(B\hat{A}D - B\hat{A}C\right)$$

$B\hat{A}D - B\hat{A}C$ rappresenta l'angolo alla circonferenza $C\hat{A}D$ per cui

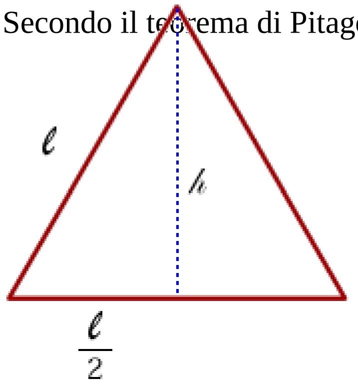
$$C\hat{O}D = 2 \times C\hat{A}D$$

Anche in questo caso l'ampiezza dell'angolo al centro è il doppio di quella del corrispondente angolo alla circonferenza.

Triangolo equilatero inscritto o circoscritto ad una circonferenza

Relazione tra altezza e lato e viceversa di un triangolo equilatero

Secondo il teorema di Pitagora abbiamo che



$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

da cui si ricava

$$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l}{2}$$

ossia

$$(1) \quad h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Lato in relazione all'altezza del triangolo equilatero

Dalla (1) si ricava che

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

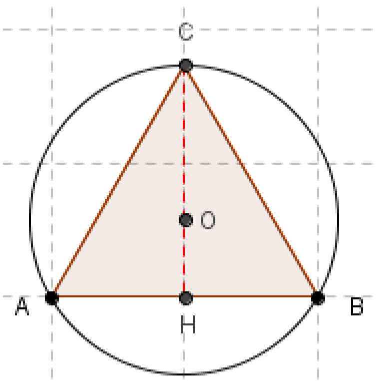
Se moltiplico numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$

$$l = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$$

ricavando la formula

$$(2) \quad \boldsymbol{l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}}$$

Triangolo equilatero inscritto ad una circonferenza



OC = *r* della circonferenza

CH = *h* del triangolo equilatero (ma anche mediana[14])

O centro della circonferenza (ma anche baricentro del triangolo equilatero)

Ricorda che il *baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra*; nel caso del triangolo equilatero questo vale anche per le altezze per cui

$$\boldsymbol{CO = 2 \cdot OH}$$

[14] Ricorda che mediane, altezze, bisettrici, assi del triangolo equilatero, coincidono

e

$$\boldsymbol{CH = 3 \cdot OH} \ oppure \ \boldsymbol{CO = \frac{2}{3}CH}$$

Dato che CH è l'altezza del triangolo equilatero e OC il raggio della circonferenza possiamo scrivere

$$(3) \quad \boldsymbol{r = \frac{2}{3}h} \quad e \quad \boldsymbol{h = \frac{3}{2}r}$$

Lato del triangolo in relazione al raggio della circonferenza

Ricordando che $l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$ (vedi formula 2) sostituiamo ad h il suo valore rispetto a r.

$$l = \frac{2}{3}h\sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}r\sqrt{3} = r\sqrt{3}$$

ossia

$$(4) \quad \boldsymbol{l = r\sqrt{3}}$$

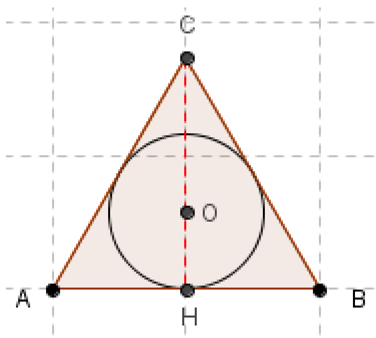
da cui si può ricavare che

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}$$

ossia

$$(5) \quad \boldsymbol{r = \frac{l}{3} \cdot \sqrt{3}}$$

Triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza



OH = r della circonferenza

CH = h del triangolo equilatero (ma anche mediana[15])

O centro della circonferenza (ma anche baricentro del triangolo equilatero)

Ricorda che il *baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra*; nel caso del triangolo equilatero questo vale anche per le altezze per cui

$$\boldsymbol{OH = \frac{1}{3} \cdot CH}$$

In un triangolo circoscritto ad una circonferenza OH rappresenta il raggio della circonferenza inscritta ossia

$$(6) \quad \boldsymbol{r = \frac{1}{3}h} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{h = 3 \cdot r}$$

[15] Ricorda che mediane, altezze, bisettrici, assi del triangolo equilatero, coincidono

Ricordando che $l = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$ (vedi formula 2) sostituiamo ad h il suo valore rispetto a r.

$$l = \frac{2}{[3]_1} \cdot [3]^1 r \cdot \sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$$

$$(7) \quad \boldsymbol{l = 2r\sqrt{3}}$$

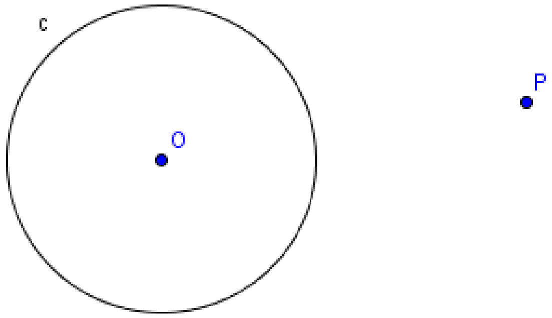
Da cui si ricava che

$$r = \frac{l}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{l\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{l}{6}\sqrt{3}$$

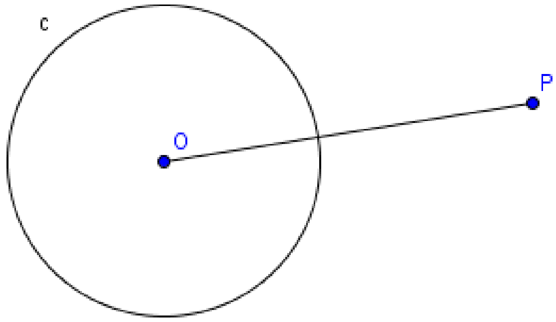
$$(8) \quad \boldsymbol{r = \frac{l}{6}\sqrt{3}}$$

Costruzione di tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P con il metodo di Euclide

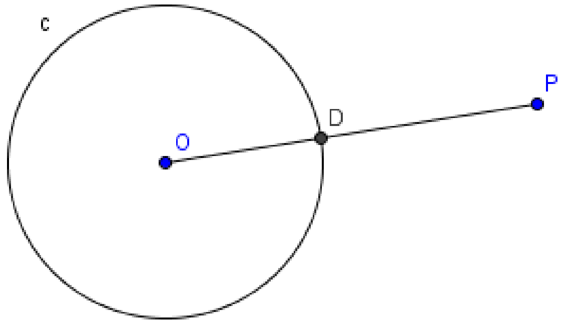
Consideriamo una circonferenza *c* ed un punto P esterno ad essa.



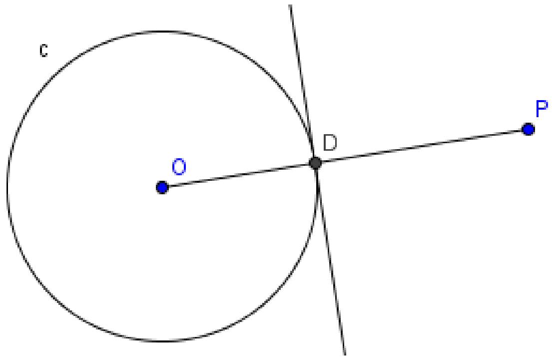
Tracciamo il segmento OP.



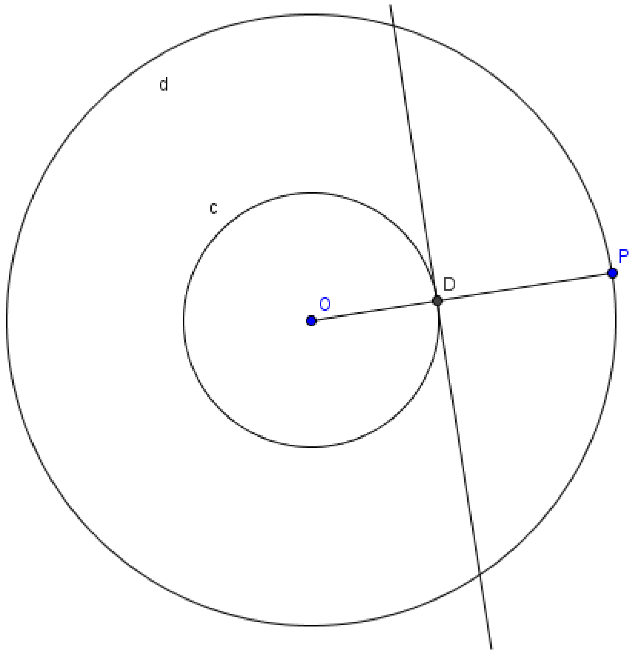
Segniamo il punto D, intersezione di OP con la circonferenza.



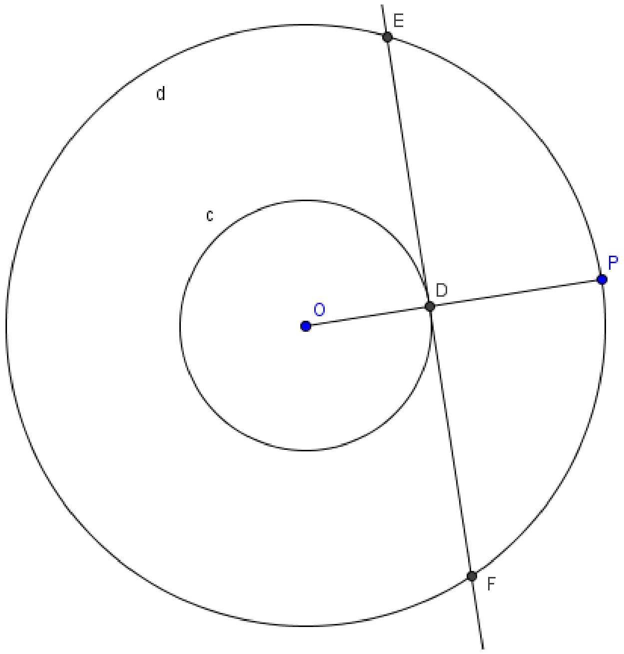
Tracciamo la perpendicolare a OP passante per D.



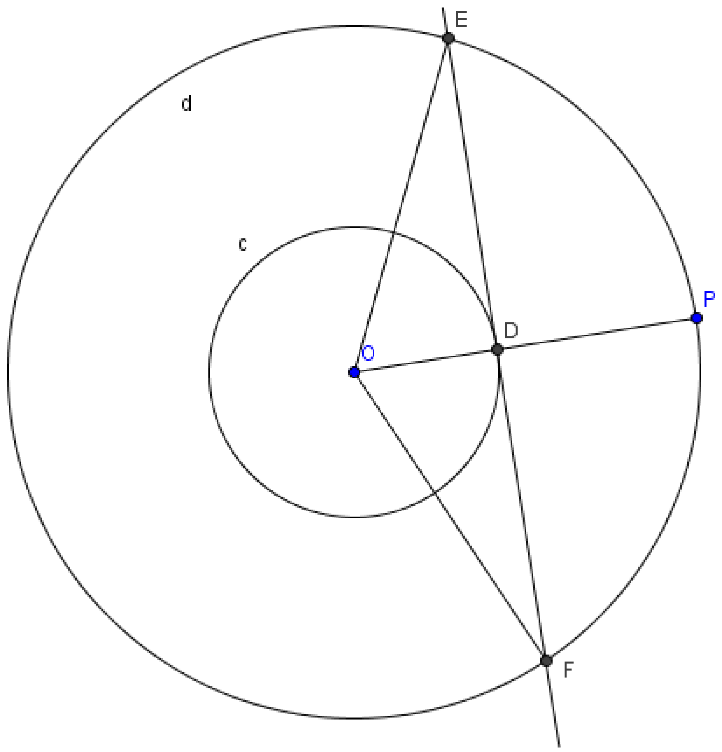
Disegniamo la circonferenza *d*, centrata in O e passante per P.



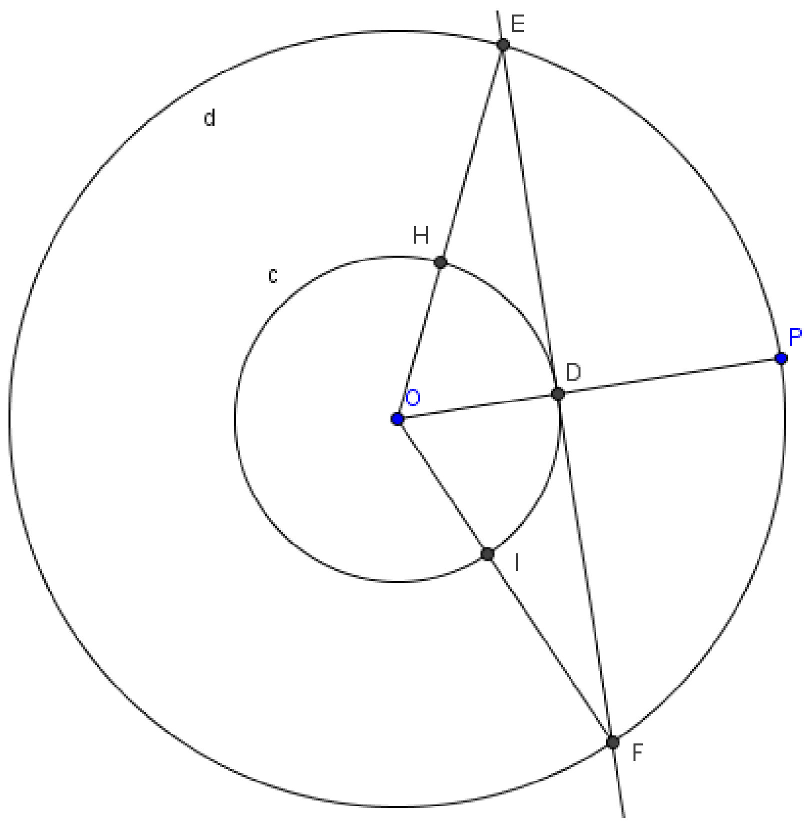
Indichiamo con E e F i punti di intersezione della retta passante per D con la circonferenza *d*.



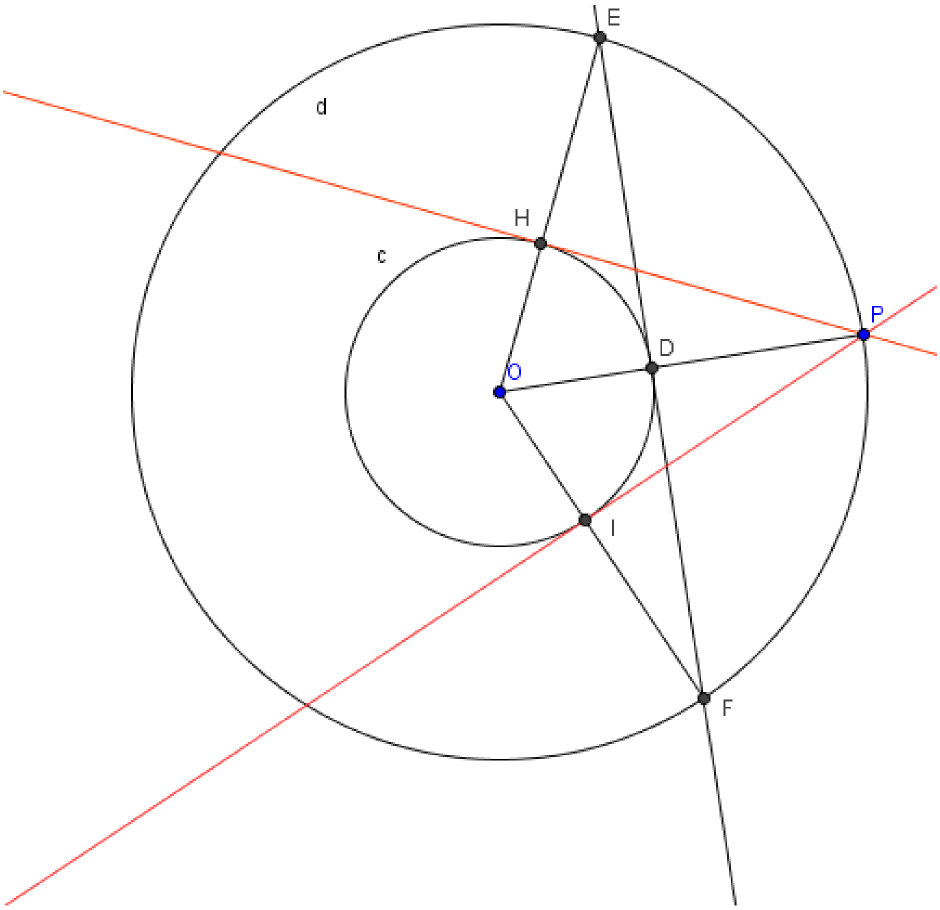
Tracciamo i segmenti OE e OF



Indichiamo con H e I i punti d'intersezione dei segmenti OE e OF con la circonferenza *c*.

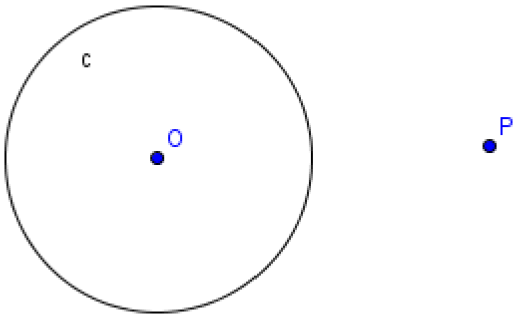


Tracciamo la retta passante per i punti P e H e quella per i punti P e I; esse rappresentano le rette tangenti alla circonferenza c, passanti per P

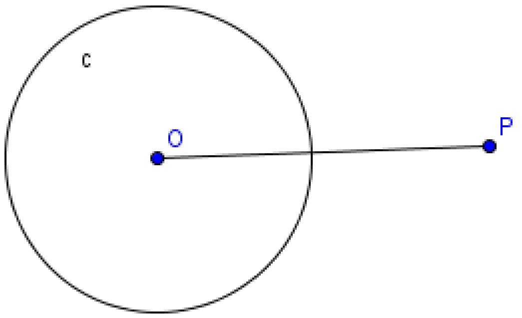

E
d
H
c
P
D
O
I
F

Costruzione di tangenti ad una circonferenza passanti per un punto P con il metodo alternativo

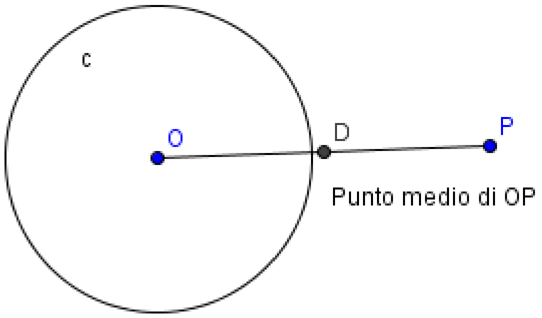
Consideriamo una circonferenza *c* ed un punto P esterno ad essa.



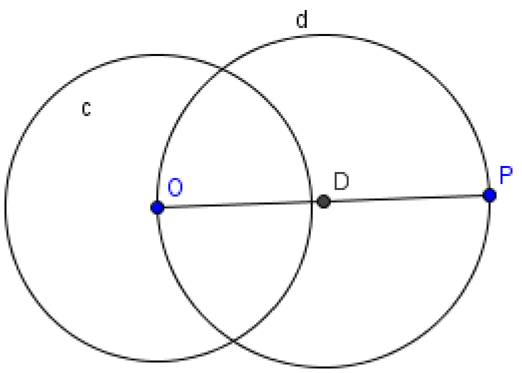
Tracciamo il segmento OP.



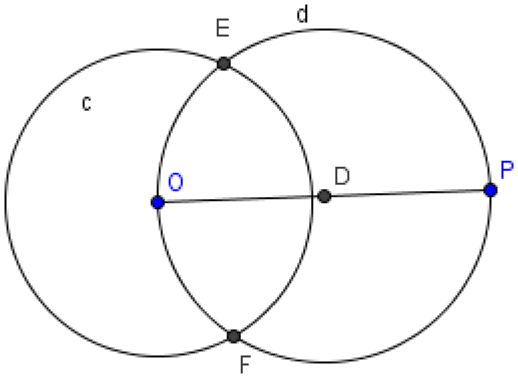
Segniamo il punto D, punto medio del segmento OP.



Tracciamo la circonferenza *d* centrata in D e passante per O.



Indichiamo con E e F i punti d’intersezione delle due circonferenze.



Tracciamo la retta passante per i punti P e E e quella per i punti P e F; esse rappresentano le rette tangenti alla circonferenza c, passanti per P