Prontuario degli argomenti di aritmetica per la classe 1ª

INSIEMI

Un insieme è una collezione di oggetti, detti *elementi*, che hanno una *proprietà* in comune.

Le caratteristiche di un insieme sono:

- ✓ un elemento può *appartenere* o *non appartenere* ad un determinato insieme;
- ✓ un elemento n*on può comparire più di una volta* in un insieme; l'*ordine non ha alcuna importanza* nell'elenco degli elementi;
- ✓ *gli elementi di un insieme lo caratterizzano in modo univoco* ossia due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.

Gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto (A, B; C; ....) mentre gli elementi con quelle minuscole (*a*, *b*, *c*, ...).

Si usa il termine **appartiene** per indicare che un elemento *a* è elemento dell'insieme A con la seguente simbologia: $a \in A$ (se non appartiene $a \notin A$)

Universo

"Ambiente" in cui si formano insiemi.

Sottoinsieme

Un insieme B è *sottoinsieme* di B *se tutti i suoi elementi sono anche elementi* di A. Il sottoinsieme si dice *proprio* se non coincide con A (ossia *esiste almeno un elemento di A che non appartiene a B*) altrimenti il sottoinsieme è detto *improprio*.

Si usa il termine **incluso** per indicare che un insieme B è sottoinsieme dell'insieme A con la seguente simbologia: $B \subset A$ (se è improprio $B \subseteq A$, se non è incluso $B \not\subset A$)

Rappresentazione

Per *tabulazione*: Elenco degli elementi che appartengono all'insieme.

Esempio: *insieme dei numeri naturali minori di 8* $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

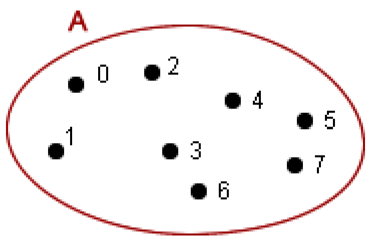
Per *proprietà* o *criterio*: Descrizione del criterio di formazione dell'insieme

Esempio: *insieme dei numeri naturali minori di 8* (criterio)

$A = \{x \mid x \in N \text{ e } x < 8\}$ (si legge: A è l'insieme di quegli elementi x *tali che* (|) ogni elemento x appartiene ($\in$) ai numeri naturali (N) e ogni elemento x, numero naturale, è minore di 8)

Diagrammi di Eulero – Venn: Rappresentazione grafica di un insieme

Esempio: *insieme dei numeri naturali minori di 8*



Insiemi particolari e insiemi numerici

Insieme vuoto: Insieme senza elementi, si indica con ∅

Insiemi numerici: *Numeri naturali*, simbolo N; *numeri interi*, simbolo Z; *numeri razionali*, simbolo Q; *numeri reali*, simbolo R.

Operazioni tra insiemi

Unione: L'unione di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A o a B. Simbolo dell'operazione $A \cup B$.

Esempio: A = {0, 2, 4, 6, 8} B = {0, 3, 6, 9, 12} $A \cup B$ = {0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}

L'operazione è commutativa.

Intersezione: L'unione di due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A e a B. Simbolo dell'operazione $A \cap B$.

Esempio: A = {0, 2, 4, 6, 8} B = {0, 3, 6, 9, 12} $A \cap B$ = {0, 6}

L'operazione *è commutativa*.

Partizione: Una partizione di un insieme A è una *collezione di sottoinsiemi* dell'insieme A che abbia queste proprietà:

- ✓ nessun sottoinsieme deve essere vuoto;
- ✓ i sottoinsiemi non devono avere elementi in comune (*disgiunti*);
- ✓ l'unione dei sottoinsiemi deve dare l'insieme A.

Esempio: i numeri pari e i numeri dispari sono una partizione dell'insieme N dei numeri naturali

LOGICA

Proposizioni

In Logica una *proposizione* (proposizione logica) è una frase che possiede un valore di verità: *vero* o *falso*. Una proposizione logica semplice è composta da un *soggetto* e da un *predicato*.
Una proposizione semplice generica si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto (p, q, …).
Le proposizioni si possono unire formando le *proposizioni logiche composte*, attraverso i *connettivi logici* ossia operatori che uniscono le proposizioni logiche semplici dando origine ad una nuova proposizione con un valore di verità.

Negazione. La negazione di una proposizione si ottiene aggiungendo la particella non davanti al verbo oppure facendo precedere la proposizione da "non è vero che". Simbolo $\neg p$.

La negazione di una proposizione è vera se la proposizione è falsa, falsa se la proposizione è vera.

Connettivo e. Due o più proposizioni semplici si possono comporre attraverso la *congiunzione*.
L'operatore della congiunzione ha come simbolo $\wedge$ ($p \wedge q$) che si legge *e* (in inglese *and*). La

congiunzione corrisponde all’operazione di *intersezione* negli insiemi. La proposizione composta *è vera solo se tutte le proposizioni semplici componenti sono vere*.

***Connettivo o** (inclusivo)*. Due o più proposizioni semplici si possono comporre attraverso la. *disgiunzione inclusiva*. L'operatore della disgiunzione ha come simbolo $\vee$ (p $\vee$ q) che si legge *o* (in inglese *or*, in latino *vel*). La corrisponde *disgiunzione inclusiva* all’operazione di *unione* negli insiemi. La proposizione composta *è vera quando almeno una delle proposizioni semplici componenti è vera*.

***Connettivo o** (esclusivo)*. Due o più proposizioni semplici si possono comporre attraverso la. *disgiunzione esclusiva* (in latino aut). La proposizione composta *è vera quando solo una delle proposizioni semplici componenti è vera*.

Numeri Naturali

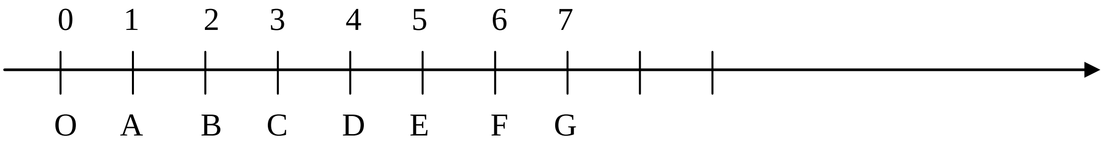
Insieme N

L’insieme dei numeri naturali si indica con **N** ed è un insieme infinito e ordinato. Dati due numeri naturali a, b se a precede b si scrive $a < b$ (a minore di b) se lo segue $a > b$ (a maggiore di b); per indicare che un numero naturale n è compreso tra due numeri naturali a, b con $a < b$, si scrive

$$a < n < b$$

Le scritture $a \geq b$ e $a \leq b$ si leggono, rispettivamente a maggiore o uguale a b e a minore o uguale a b.

I numeri naturali si possono rappresentare sulla retta orientata fissando un’origine O ed segmento **u**, unità di misura, che ci permetta di passare dall’origine O a punti successivi, mantenendo la stessa distanza e facendo corrispondere ad ogni punto un numero naturale.



Il numero naturale che corrisponde ad un punto della rette è detto *ascissa* del punto.

Scrittura polinomiale di un numero naturale: un numero naturale può essere rappresentato come somma di potenze del dieci, ognuna moltiplicata per il naturale che rappresenta il valore delle unità, decine, centinaia, ecc che corrispondono alla potenza[1].

Esempio: $3461 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Operazioni aritmetiche fondamentali in N

Addizione Operazione che a due numeri (*addendi*) ne associa un terzo (*somma*) ottenuto contando di seguito al primo tante unità quante ne rappresenta il secondo.

L’addizione è un’operazione interna ad **N**[2] (**N** è chiuso rispetto all’addizione).

Proprietà

[1] Ricorda che 10^0 corrisponde alle unità di primo ordine (unità), 10^1 alle unità di secondo ordine (decine), 10^2 alle unità di terzo ordine (centinaia), ecc.

[2] Qualunque coppia di naturali si consideri l’addizione associa sempre un naturale.

Commutativa $a + b = b + a$

Associativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Elemento neutro **0** ossia $a + 0 = 0 + a = a$

Caratteristiche particolari: la somma di due numeri dispari o di due numeri pari è un numero pari, la somma di un numero pari con un numero dispari è dispari.

Sottrazione Operazione inversa all'addizione che risolve l'equazione $a + x = b$ ossia risponde alla domanda: quale numero x bisogna aggiungere ad a per ottenere b? I termini di una sottrazione si dicono *minuendo* (il primo numero) e *sottraendo* (secondo numero, il risultato è detto *differenza* che si ottiene togliendo al minuendo tante unità quante indicate dal sottraendo[3].

La sottrazione non è interna[4] all'insieme **N** (**N** è aperto rispetto alla sottrazione).

Proprietà

Invariantiva $a - b = (a + n) - (b + n) = (a - n) - (b - n)$ ossia aggiungendo o togliendo uno stesso numero n da entrambi i termini di una sottrazione la differenza non cambia.

Caratteristiche particolari: $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - a$ non ha risultato in **N**.

Moltiplicazione Operazione che a due numeri detti *fattori*[5] ne associa un terzo, detto *prodotto*, addizionando tanti addendi uguali al primo fattore quante sono le unità del secondo. La moltiplicazione si simboleggia con $a \times b$ oppure con $a \cdot b$[6].

Proprietà

Commutativa $a \times b = b \times a$

Associativa $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Distributiva $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$[7]

Elemento neutro **1** ossia $a \times 1 = 1 \times a = a$

Elemento assorbente[8] **0** ossia $a \times 0 = 0 \times a = 0$

Caratteristiche particolari: il prodotto di due numeri dispari è dispari di due numeri pari è un numero pari, il prodotto di un numero pari con un numero dispari è pari.

Divisione Operazione inversa alla moltiplicazione che risolve l'equazione $a \cdot x = b$ ossia risponde alla domanda quale numero x bisogna moltiplicare per a per ottenere b?

[3] Oppure contando quante unità occorre aggiungere al sottraendo per ottenere il minuendo.
[4] Dati due naturali a, b la sottrazione ha un risultato solo se $a \geq b$.
[5] Il primo fattore è detto *moltiplicando* e il secondo *moltiplicatore*.
[6] Anche la scrittura ab ha il significato di a moltiplicato b.
[7] $\pm$ si legge più o meno e indica che la proprietà vale sia per la somma che la differenza
[8] Annullamento del prodotto

La divisione tra due numeri a, b si può indicare con $a: b$ o a/b. Il risultato di una divisione viene detto *quoziente* o *quoto* mentre i termini *dividendo* e *divisore*. Il quoziente si può interpretare come

a) il numero che si ottiene suddividendo il dividendo in tante parti uguali quante ne indica il divisore (es. 32 : 8 = 4 ossia se divido 32 in 8 parti uguali ciascuna vale 4)
b) il numero che indica il numero di volte che il divisore è contenuto nel dividendo (es. 32 : 8 = 4 ossia 8 è contenuto nel 32 quattro volte)

La divisione tra due numeri *a* (dividendo) e *b* (divisore) può essere

a) esatta, quindi indicando con *c* il quoziente si ha che $a = b \cdot c$
b) non esatta, ossia c'è un resto *r* per cui $a = b \cdot c + r$

La divisione non è interna all'insieme **N** (**N** è aperto rispetto alla divisione).

Proprietà

Invariantiva $a: b = (a \cdot n): (b \cdot n) = (a: n): (b: n)$ con $n \neq 0$[9]

Distributiva $(a \pm b): c = a: c \pm b: c$

Comportamento dello zero

- ✓ $0: a = 0$
- ✓ $a: 0$ impossibile
- ✓ $0: 0$ indeterminata

Caratteristiche particolari: $a: a = 1$

Priorità delle operazioni nello svolgimento di un'espressione numerica

1) Elevamento a potenza
2) Moltiplicazione e divisione nell'ordine in cui si presentano
3) Addizione e sottrazione nell'ordine in cui si presentano

L'ordine può essere alterato dalle parentesi

Elevamento a potenza

Operazione che permette di associare a due numeri a, *n* un terzo numero ottenuto moltiplicando a (*base*) per se stesso tante volte quante sono le unità di *n* (*esponente*). Il risultato è detto *potenza*.

$$a^n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_n \text{ esempio } 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Ossia: la potenza *n-esima* di un numero *a* è il prodotto di n fattori tutti uguali ad *a*.

Proprietà

- ✓ $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

[9] Il simbolo ≠ vuol dire *diverso* o *non uguale*.

- ✓ $a^n : a^m = a^{n-m}$ (in **N** $n > m$)
- ✓ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- ✓ $a^n : b^n = (a : b)^n$ (in **N** *a* multiplo di *b*)
- ✓ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Casi particolari

$1^n = 1$; $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $0^n = 0$; 0^0 non ha significato.

Le potenze del 10 si trovano aggiungendo a 1 tanti zeri quando è indicato dall'esponente.

$10^3 = 1000$; $10^6 = 1\,000\,000$; $10^9 = 1\,000\,000\,000$

Notazione scientifica e ordine di grandezza

Un numero naturale, diverso da zero, è scritto in *notazione scientifica* quando viene rappresentato come moltiplicazione di un numero decimale compreso tra 1 e 10 e una potenza di 10 ossia $a \cdot 10^n$.

Esempio $3405000 = 3{,}405 \cdot 10^6$ dove 3,405 è la *parte intera* e 10^6 la *potenza*.

L'*ordine di grandezza* di un numero è dato dalla potenza di 10 più vicina la quel numero. Scrivendo il numero in notazione scientifica l'ordine di grandezza viene valutato in questo modo:

a) Si trovano le potenze di 10 tra le quali il numero è compreso
b) Se la parte intera è minore di 5 l'ordine di grandezza è la potenza di 10 minore
c) Se la parte intera è uguale o maggiore di 5 l'ordine di grandezza è la potenza di 10 maggiore

$10^4 < 2{,}5 \cdot 10^4 < 10^5$ ordine di grandezza 10^4

$10^4 < 7{,}5 \cdot 10^4 < 10^5$ ordine di grandezza 10^5

Divisibilità

Un numero naturale *b* è ***multiplo*** di un numero naturale *a* se esiste un numero naturale *n* che moltiplicato per *a* dà *b*.

Esempio: 15 è multiplo di 3 perché 3·**5** = 15; si dice che 15 è multiplo di 3 *secondo* 5

I multipli di un numero naturale *a* si trovano moltiplicando *a* per la successione dei numeri naturali escluso lo 0. L'insieme dei multipli di un numero naturale *a* è infinito.

Un numero naturale *a* è ***divisore*** di un numero naturale *b* se esiste un numero naturale *n* che moltiplicato per *a* dà *b*.

Esempio: 5 è divisore di 15 perché 5·**3** = 15; si dice che 5 è divisore di 15 *secondo* 3

L'insieme dei divisori di un numero naturale *a* è finito.

Alcune proprietà della divisibilità

- ✓ Qualsiasi numero naturale ammette come divisori 1 e se stesso (*divisori banali*)
- ✓ Un prodotto è divisibile per ciascuno dei suoi fattori
- ✓ Se un numero naturale *a* è divisibile per un numero naturale *b* lo sono anche tutti i suoi multipli

- ✓ Se gli addendi di una addizione sono divisibili per lo stesso numero anche la loro somma è divisibile per quel numero
- ✓ 0 non è divisore di nessun numero

Criteri di divisibilità

- ✓ Un numero è divisibile per 2 se l'ultima cifra è una cifra pari
- ✓ Un numero è divisibile per 3 se la somma delle cifre dà un multiplo di 3
- ✓ Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre danno un numero multiplo di 4 o sono due zeri
- ✓ Un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra è 0 o 5
- ✓ Un numero è divisibile per 9 se la somma delle cifre dà un multiplo di 9[10]
- ✓ Un numero è divisibile per una potenza di 10 se le ultime cifre sono costituite da tanti zeri quando è indicato dall'esponente della potenza
- ✓ Un numero è divisibile per 11 se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e quella delle cifre di posto pari è 0 o un multiplo di 11
- ✓ Un numero è divisibile per 25 se le ultime due cifre sono 00, 25, 50, 75

Numeri primi

Un numero naturale $n > 1$ è *primo* se ammette come unici divisori 1 e se stesso. Un numero naturale non primo si dice *composto*.

Alcune caratteristiche

- ✓ I numeri primi sono infiniti[11]
- ✓ 2 è l'unico numero primo pari
- ✓ 1 non è primo perché ha un solo divisore
- ✓ 0 non è primo perché ne ha infiniti

Teorema fondamentale dell'aritmetica

Ogni numero naturale diverso da 1 o è un numero primo o si può esprimere come *prodotto di numeri primi* e questo prodotto *è unico* trascurando l'ordine in cui compaiono i fattori.

Criterio generale di divisibilità

Due numeri naturali *a*, *b* sono divisibili se, scomposti in fattori primi, in *a* appaiono almeno tutti i fattori di *b* con esponente maggiore o uguale a quello con cui compaiono in *b*.

Il quoziente di due numeri divisibili, scomposti in fattori primi, è dato dal prodotto di tutti i fattori del dividendo aventi come esponente la differenza degli esponenti con cui i fattori compaiono nel dividendo e nel divisore.

Esempio. $11880 : 136 = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 5)\ : (2^2 \cdot 3 \cdot 11) = 2^{3-2} \cdot 3^{3-1} \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

[10] Un numero divisibile per 9 è divisibile anche per 3 ma **non sempre** è valido il contrario.
[11] Vedi in appendice la dimostrazione matematica

M. C. D

Il *Massimo Comun Divisore* fra due o più numeri è il maggiore tra i divisori comuni ai numeri. Il massimo comun divisore tra i due numeri *a* e *b* viene indicato con (*a*, *b*)

Calcolo

Il MCD tra due numeri naturali *a*, *b* si può calcolare determinando la scomposizione in fattori primi dei due numeri dati e moltiplicando i fattori comuni, considerati una sola volta con il loro minimo esponente. Lo stesso procedimento viene applicato se i numeri naturali sono più di due.

Algoritmo euclideo (altro metodo di calcolo del MCD)

Dati due numeri naturali a, b si divide il maggiore per il minore, se il resto della divisione

a) è 0, b è il MCD
b) è diverso da 0, si divide il divisore per il resto ottenuto e si continua cosi fino ad ottenere resto 0; l'ultimo divisore è il MCD

Esempio MCD(35, 100) $100:35 = 2 \quad r = 30; 35:30 = 1 \quad r = 5; 30:5 = 6 \quad r = 0 \quad M.C.D. = 5$

Proprietà e caratteristiche

- ✓ Ogni divisore comune di due o più numeri naturali è divisore anche del loro M. C. D.
- ✓ Se il M. C. D. di due numeri naturali *a*, *b* è 1 i numeri sono detti *primi tra loro*.
- ✓ Se dati due o più numeri naturali il maggiore di questi è multiplo degli altri allora è il M. C. D.

m . c. m

Il *minimo comune multiplo* tra due o più numeri naturali è il minore tra i multipli comuni ai numeri dati.

Calcolo

Il *m. c. m* tra due numeri naturali *a*, *b* si può calcolare determinando la scomposizione in fattori primi dei due numeri dati e moltiplicando i fattori comuni e non comuni, considerati una sola volta con il loro massimo esponente. Lo stesso procedimento viene applicato se i numeri naturali sono più di due.

Proprietà e caratteristiche

- ✓ Il *m. c. m* tra numeri primi tra loro è dato dal loro prodotto
- ✓ Se tra due o più numeri naturali il maggiore è multiplo degli altri è il *m. c. m*.
- ✓ Dati due numeri naturali *a*, *b* il loro prodotto è uguale al prodotto del loro MCD e del loro *m. c. m* ossia $a \cdot b = MCD(a,b) \cdot mcm(a,b)$ da cui si può ricavare che

$$mcm(a,b) = \frac{a \cdot b}{MCD(a,b)}$$

e

$$MCD(a,b) = \frac{a \cdot b}{mcm(a,b)}$$

FRAZIONI

Una frazione è un modo per esprimere una quantità basandosi sulla divisione di un oggetto in un certo numero di parti della stessa dimensione e viene indicata con $\frac{a}{b}$ dove b, il *denominatore*, indica il numero di parti in cui viene suddiviso l'intero e a, il *numeratore*, il numero di parti considerate.

Un'*unità frazionaria*, indicata con $\frac{1}{n}$ con $n \neq 0$ rappresenta una sola delle n parti in cui l'intero è stato suddiviso.

Frazione come operatore

Una fazione $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ è un operatore sull'intero in quanto consente di dividerlo in b parti e considerarne a. Esempio $\frac{3}{4}$ di 48 $\Rightarrow 48:4 \cdot 3 = 36$

Frazione come risultato di una divisione

Ogni frazione rappresenta il quoziente esatto della divisione tra numeratore e denominatore. Esempio $5:9 = \frac{5}{9}$. Questo porta alla costruzione di un nuovo insieme numerico, quello dei *numeri razionali assoluti* (Q) dove la divisione è sempre possibile.

Frazioni equivalenti

Sono quelle frazioni che applicate su un intero portano alle stesso risultato. Data una frazione se ne ottiene una equivalente moltiplicando o dividendo per uno stesso numero numeratore e denominatore (proprietà *invariantiva*).

Quando numeratore e denominatore sono *primi fra loro* la frazione viene detta ridotta ai *minimi termini*. Se una frazione non è ridotta ai minimi termini la si può ridurre dividendo numeratore e denominatore per il loro MCD.

Frazioni proprie, improprie e apparenti

Frazioni proprie: frazioni che operando su un intero producono una parte minore dell'intero. Il numeratore è sempre minore del denominatore.

Frazioni improprie: frazioni che operando su un intero producono una parte maggiore dell'intero. Il numeratore è sempre maggiore del denominatore. Un frazione impropria può essere rappresentata come somma di un intero e una frazione propria. Esempio $\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

Frazioni apparenti: frazioni che operando su un intero producono un multiplo dell'intero. Il numeratore è sempre multiplo del denominatore.

NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI[12]

Un numero razionale assoluto è costituito da *una classe di frazioni equivalenti*, l'insieme di queste classi costituisce l'insieme dei numeri razionali assoluti che viene indicato con Q_a. Un numero razionale assoluto lo si può rappresentare prendendo all'interno della classe di equivalenza la frazione ridotta ai minimi termini[13]. L'insieme Q_a rappresenta un *ampliamento dell'insieme dei numeri naturali* ed è chiuso rispetto all'addizione alla moltiplicazione e a alla divisione.

Calcolo con le frazioni

Addizione / sottrazione	Per addizionare / sottrarre due o più frazioni bisogna che abbiano le stesso denominatore; se le frazioni non hanno lo stesso denominatore bisogna trovare le frazioni equivalenti con lo stesso denominatore attraverso il calcolo del m. c. m tra i denominatori stessi. Successivamente si addizionano / sottraggono i numeratori ottenendo una frazione che ha come numeratore la somma / differenza tra i numeratori delle frazioni e come denominatore il denominatore comune.
Moltiplicazione	Per moltiplicare due o più frazioni si moltiplicano tra loro i numeratori e tra loro i denominatori dei fattori dopo aver effettuato le eventuali semplificazioni tra numeratori e denominatori[14].
Frazione reciproca o inversa	La inversa o reciproca di una frazione $\frac{a}{b}$ è la frazione $\frac{b}{a}$. Il loro prodotto è 1.
Divisione	Per dividere due frazioni si moltiplica la prima per l'inverso della seconda.
Potenza	La potenza di una frazione si ottiene elevando allo stesso esponente sia numeratore che denominatore: L'operazione di elevamento a potenza si indica $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Le scritture $\frac{a^n}{b}$; $\frac{a}{b^n}$; $\frac{a^n}{b^m}$ indicano rispettivamente l'elevamento a potenza del numeratore, l'elevamento a potenza del denominatore e l'elevamento a potenze diverse del numeratore e del denominatore.

[12] L'argomento può essere svolto anche nella classe 2ª

[13] Frazione con numeratore e denominatore primi fra loro

[14] La riduzione ai minimi termini può essere eseguita successivamente sul prodotto ma si consiglia la semplificazione tra numeratore e denominatore dei fattori della moltiplicazione.

APPENDICE

Dimostrazione dell'infinità dei numeri primi

Per dimostrare l'enunciato[15] "*i numeri primi sono infiniti*" si ricorre al metodo della *dimostrazione per assurdo*: si presuppone vera l'affermazione contraria "esiste un numero primo maggiore di tutti gli altri" e si mostra che questa porta ad una contraddizione.

Supponiamo che p sia il maggiore dei numeri primi e consideriamo il numero r, prodotto di tutti i numeri primi da 2 a p, $r = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot .... \cdot p$ e il numero $r+1$. Questo numero non è divisibile per nessuno dei fattori primi di r perché la divisione dà sempre resto 1 quindi, per il teorema fondamentale dell'aritmetica[16], si possono presentare due casi

a) $r+1$ è un numero primo maggiore di p
b) $r+1$ non è primo ma la sua scomposizione in fattori primi deve contenere fattori diversi dal prodotto che ha portato ad r e maggiori di p

In entrambi i casi p non è il maggiore dei numeri primi quindi questi sono infiniti.

[15] È un sinonimo di proposizione
[16] Vedi più indietro