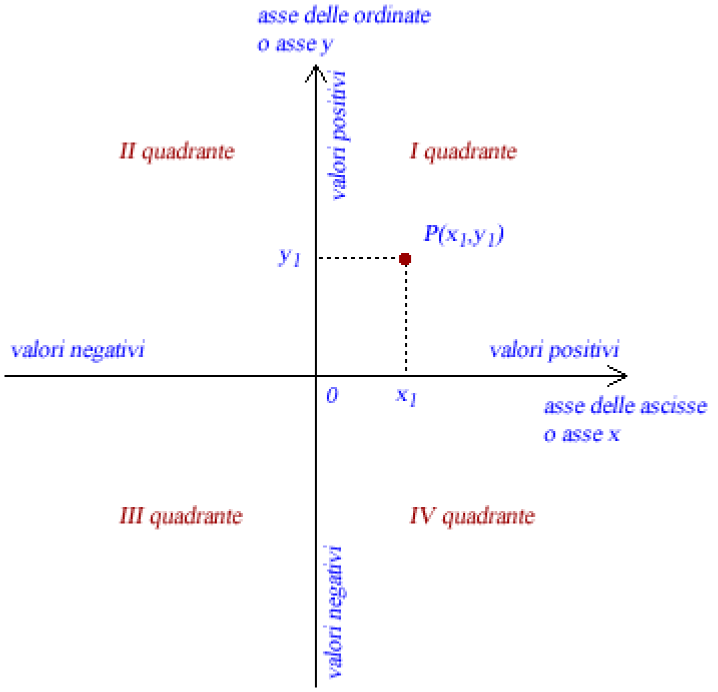
Quadro riassuntivo di geometria analitica

IL PIANO CARTESIANO

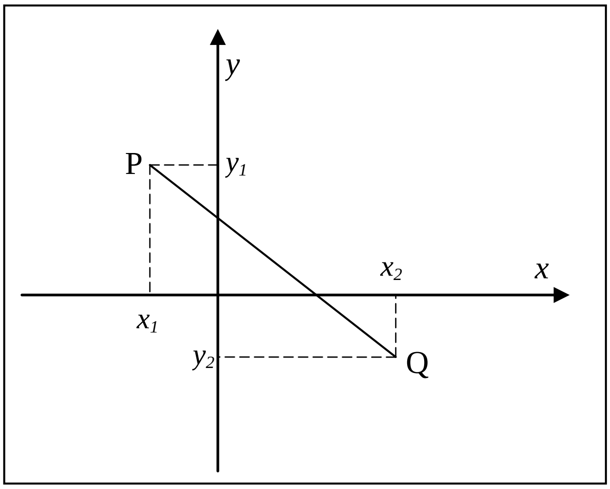


Un *piano cartesiano* è caratterizzato da un *sistema di riferimento* costituito da una *coppia di rette orientate perpendicolari* (*ortogonali*) .
Il punto d'intersezione delle rette viene detto *origine* e ogni retta viene *graduata* per mezzo di un'*unità di misura*, partendo dall'origine.
L'asse orizzontale *(asse delle ascisse*) è graduato verso destra (*positivo*) e verso sinistra (*negativo*); l'asse verticale *(asse delle ordinate*) è graduato verso l'alto (positivo) e verso il basso (negativo).
Ogni punto P del piano cartesiano è individuata da una coppia ordinata di numeri (*x*, *y*), le *coordinate del punto* , dove *x* indica la distanza dall'asse y (detta *ascissa* o *coordinata x*) e *y* quella dall'asse x (detta *ordinata* o *coordinata y*).

Le coordinate di un punto P sono:

- entrambe positive nel 1° quadrante
- ascissa negativa e ordinata positiva nel 2° quadrante
- entrambe negative nel 3° quadrante
- ascissa positiva e ordinata negativa nel 4° quadrante

DISTANZA TRA DUE PUNTI



Distanza

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendenza

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Punto medio

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_m = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

EQUAZIONE DELLA RETTA

Richiamo del concetto di funzione[1]

Definizione

Date due grandezze A e B e un legame tra le due, se ad ogni valore *x* di A corrisponde uno ed uno solo valore *y* di B allora si dice che *y* è *funzione* di *x* e indichiamo il legame con $y = f(x)$.

La variabile *x* viene detta *variabile indipendente* mentre la variabile *y*, *variabile dipendente*.

Funzioni empiriche e funzioni matematiche

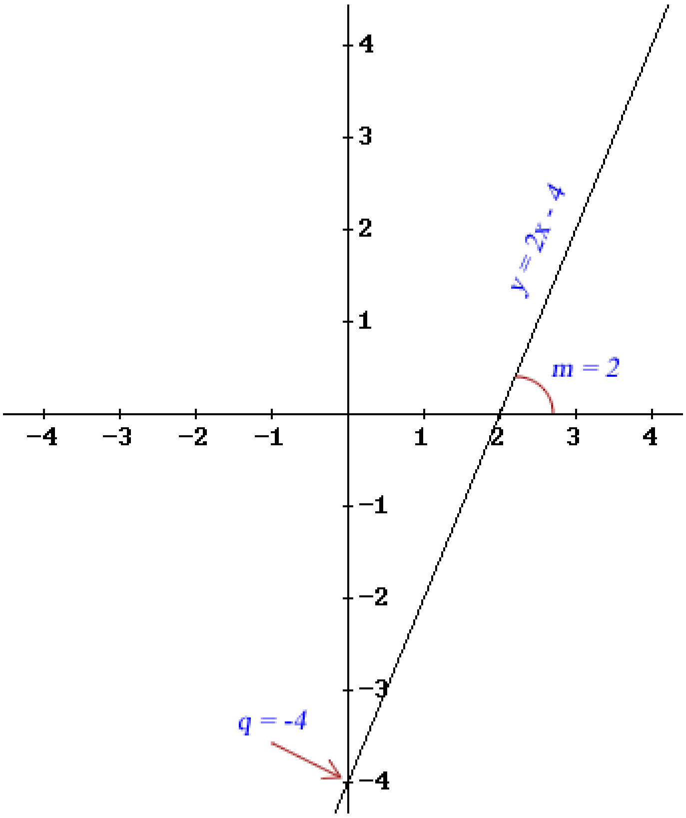
Una funzione si dice *empirica* se il legame che fa dipendere i valori *y* della variabile dipendente dai valori *x* della variabile indipendente *non è di tipo matematico* mentre è *matematica* se il legame si può esprimere con una *formula*.

Grafico di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$ si può far corrispondere ad ogni coppia di valori *x*, *y* un punto nel *piano cartesiano*, l'insieme di questi punti costituisce il *grafico* della funzione.

Equazione della retta

Ogni funzione del tipo $y = mx + q$ ha per grafico, in un piano cartesiano, una retta e, viceversa, ad ogni retta tracciata in un piano cartesiano corrisponde una funzione del tipo $y = mx + q$.



La funzione $y = mx + q$ viene detta equazione della retta[2].

m è il coefficiente angolare della retta è ed indice dell'inclinazione della retta rispetto all'asse delle ascisse o asse *x*.

Quando:

- $m > 0$ la retta forma un angolo acuto, misurato in senso antiorario, con l'asse *x*;
- $m < 0$ la retta forma un angolo ottuso, misurato in senso antiorario, con l'asse *x*;
- $m = 1$ la retta forma un angolo di 45°, misurato in senso antiorario, con l'asse *x*;
- $m = -1$ la retta forma un angolo di 135°, misurato in senso antiorario, con l'asse *x*;

m rappresenta il rapporto tra l'incremento delle ordinate e quello delle ascisse della retta considerata ossia dati due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ appartenenti alla retta, m si ricava da

[1] Vedi Aritmetica 2 di Sintesi degli argomenti di matematica

[2] Più precisamente *equazione esplicita* della retta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e questo rapporto è costante per qualsiasi coppia di punti appartenenti alla retta si consideri.

q rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse y.

Se $q = 0$ la retta passa per l'origine degli assi e l'equazione che la rappresenta ha questa forma $y = mx$. In questo caso se:

- $m = 1$ la retta forma un angolo di 45°, misurato in senso antiorario, con l'asse *x* ed è bisettrice del 1° e del 3° quadrante;
- $m = -1$ la retta forma un angolo di 135°, misurato in senso antiorario, con l'asse *x* ed è bisettrice del 2° e del 4° quadrante;

Rette parallele agli assi

Una retta parallela all'asse delle ascisse (asse *x*) ha questa equazione $y = a$ dove a rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse *y*).

Una retta parallela all'asse delle ordinate (asse *y*) ha questa equazione $x = a$ dove a rappresenta l'ascissa del punto d'intersezione della retta con l'asse delle ascisse (asse *y*).

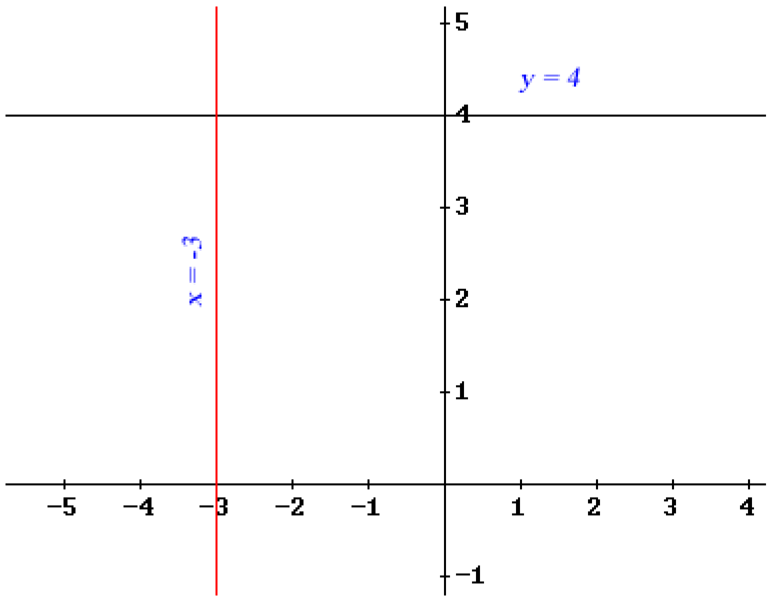


Grafico di una retta di data equazione

Per costruire il grafico di una retta di data equazione si possono utilizzare due metodi

1. Si compila una tabella assegnando alcuni valori alla variabile *x* e calcolando per ogni *x* il corrispondente valore della variabile *y*. Si fa corrispondere ad ogni coppia di valori *x*, *y* un punto del piano cartesiano e si traccia la retta che passa per quei punti.
2. Si trovano le coordinate dei punti d'intersezione della retta sugli assi[3].
   a. nell'equazione della retta $y = mx + q$, q rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse *y* per cui le coordinate del punto d'intersezione sull'asse y saranno $(0, q)$;

[3] Ricorda che per determinare una retta bastano due punti distinti.

b. le coordinate del punto d'intersezione sull'asse si trovano ponendo uguale a 0 l'equazione $y = mx + q$ da cui si ricava che

$$mx + q = 0 \qquad mx = -q \qquad x = -\frac{q}{m}$$

per cui le coordinate saranno $\left(-\frac{q}{m}, 0\right)$.

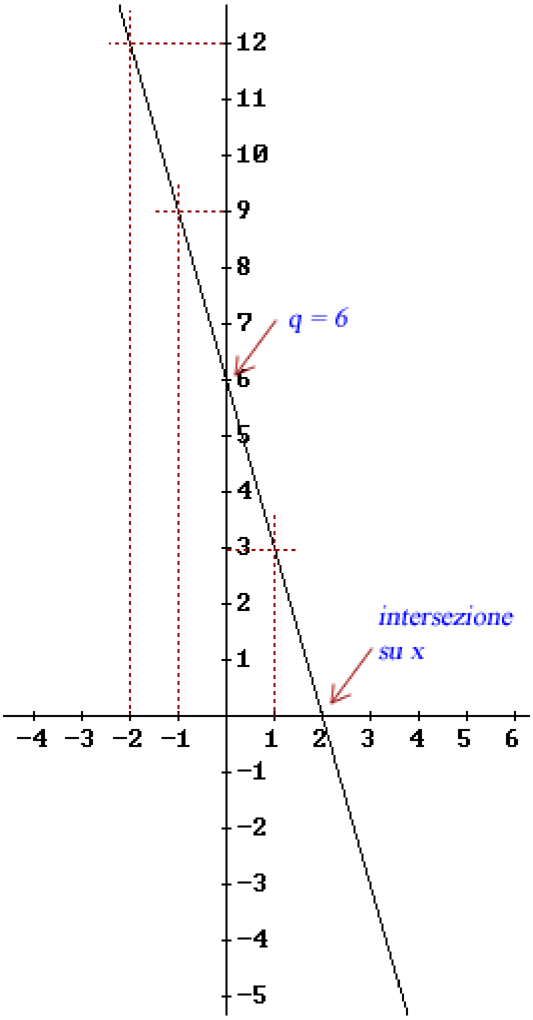
c. Si traccia la retta che passa per i due punti così trovati.

Esempio

$y = -3x + 6$

Costruzione con tabella

x	y
0	$-3 \cdot 0 + 6 = 6$
1	$-3 \cdot 1 + 6 = 3$
2	$-3 \cdot 2 + 6 = 0$
-1	$-3 \cdot (-1) + 6 = 9$
-2	$-3 \cdot (-2) + 6 = 12$



Costruzione con i punti d'intersezione sugli assi

Intersezione sull'asse *y* è data da *q* che in questo caso è 6 per cui le coordinate sono (0, 6).

L'intersezione con l'asse x si calcola così:

$$-3x + 6 = 0 \qquad -3x = -6 \qquad x = \frac{-6}{-3} = 2$$

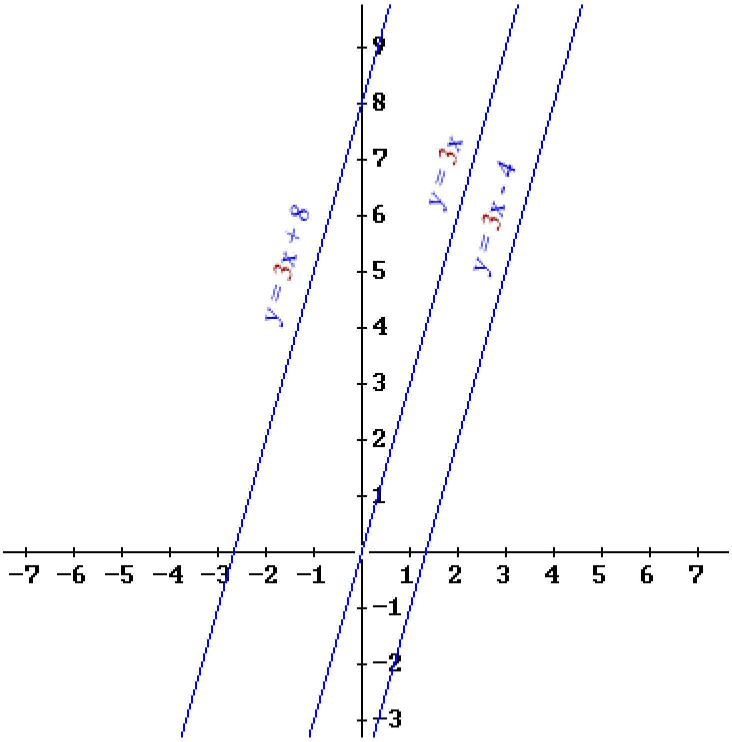
Per cui le coordinate sono (2, 0).

Rette parallele

Due rette o più sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Esempio: queste tre equazioni rappresentano tre rette parallele

$y = 3x + 8 \qquad y = 3x \qquad y = 3x - 4$

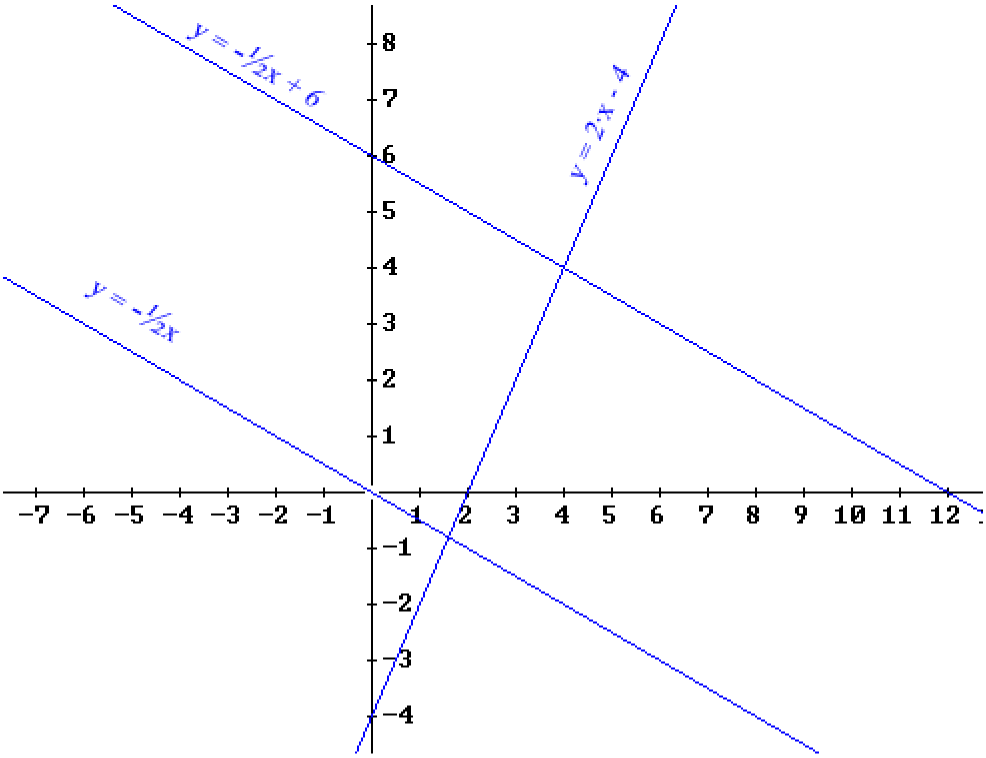


Rette perpendicolari

Due rette sono perpendicolari quando il coefficiente angolare di una è l'opposto dell'inverso dell'altra ossia quando i coefficienti angolari hanno segni opposti e valori assoluti inversi.

Esempio: data la retta di equazione $y = 2x - 4$ queste due rette sono perpendicolari ad essa

$y = -\frac{1}{2}x \qquad y = -\frac{1}{2}x + 6$



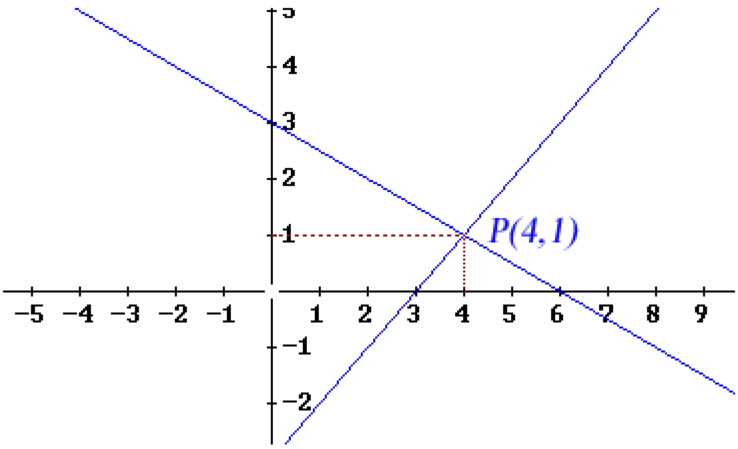
Punto d'intersezione di due rette

Date le equazioni di due rette le coordinate del loro punto d'intersezione si possono ricavare in due modi:

a) metodo grafico: si fa il grafico delle due rette e si prende nota delle coordinate del punto che hanno in comune

Esempio

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ $\qquad$ $y = x - 3$



b) metodo algebrico: si pone un'eguaglianza tra le due equazioni e si risolve rispetto all'incognita *x* che costituisce la coordinata delle ascisse del punto d'intersezione; si sostituisce il valore trovato alla variabile *x* in una delle due equazioni trovando il valore della coordinata *y* del punto d'intersezione.

Esempio

$y = \frac{2}{3}x - 4 \qquad y = -\frac{1}{6}x + 10$

Si eguagliano le due equazioni

$\frac{2}{3}x - 4 = -\frac{1}{6}x + 10$

Si risolve rispetto alla *x*

$\frac{4x - 24}{6} = \frac{-x + 60}{6} \qquad 4x - 24 = -x + 60 \qquad 4x + x = +60 + 24 \qquad 5x = 84 \qquad x = \frac{84}{5}$

Si calcola *y*

$y = -\frac{1}{6} \cdot \frac{84}{5} + 10 \qquad y = -\frac{14}{5} + 10 \qquad y = \frac{36}{5}$

Le coordinate del punto d'intersezione tra le due rette sono

$P\left(\frac{84}{5}, \frac{36}{5}\right)$

Equazione di una retta dalle coordinate di due suoi punti

Date le coordinate di due punti[4] di una retta si può trovare la sua equazione in questo modo.

Calcolo di m

m rappresenta la pendenza della retta per cui dati due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Calcolo di q

Si risolve rispetto a q l'equazione che si ottiene sostituendo a y e x, nell'equazione generica della retta, le coordinate di P o Q e adoperando come m il valore trovato.

$y_1 = mx_1 + q$ oppure $y_2 = mx_2 + q$

Esempio

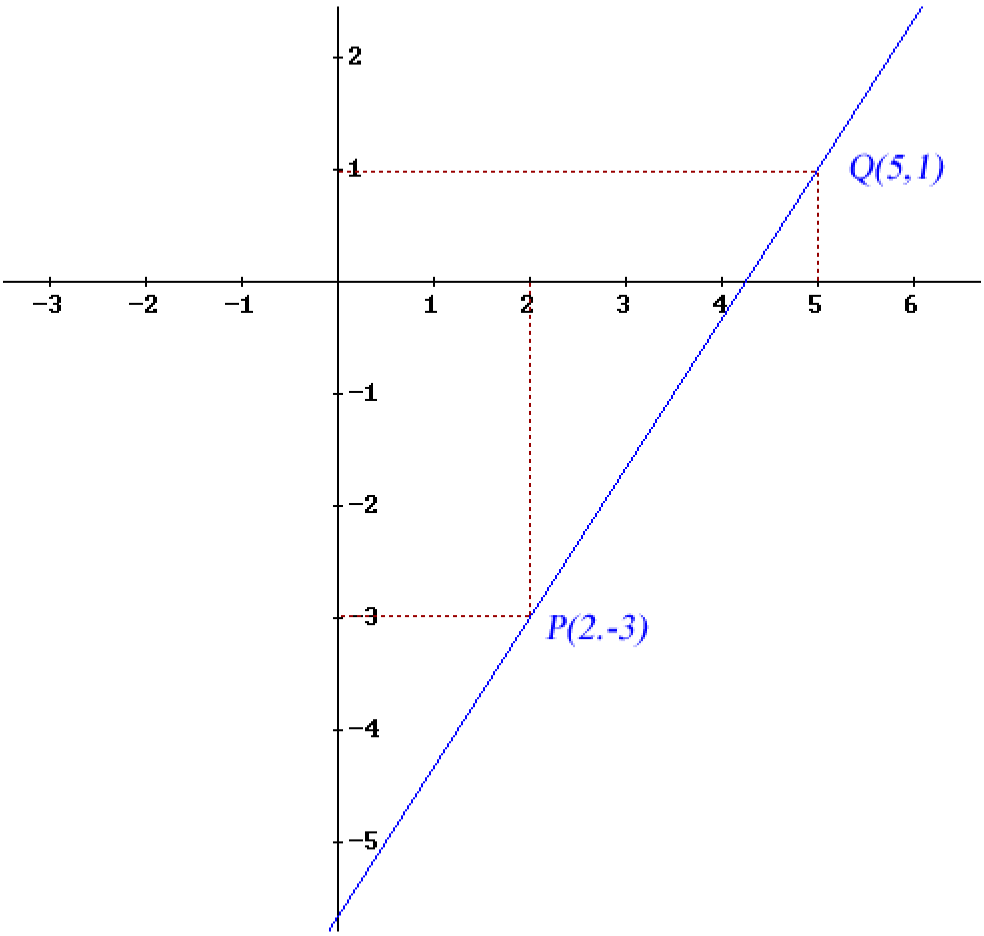
$P(2, -3); Q(5,1)$

$$m = \frac{1-(-3)}{5-2} = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$

$-3 = \frac{4}{3} \cdot 2 + q \quad -3 = \frac{8}{3} + q \quad q = -3 - \frac{8}{3} \quad q = -\frac{17}{3}$

L'equazione della retta è

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$$

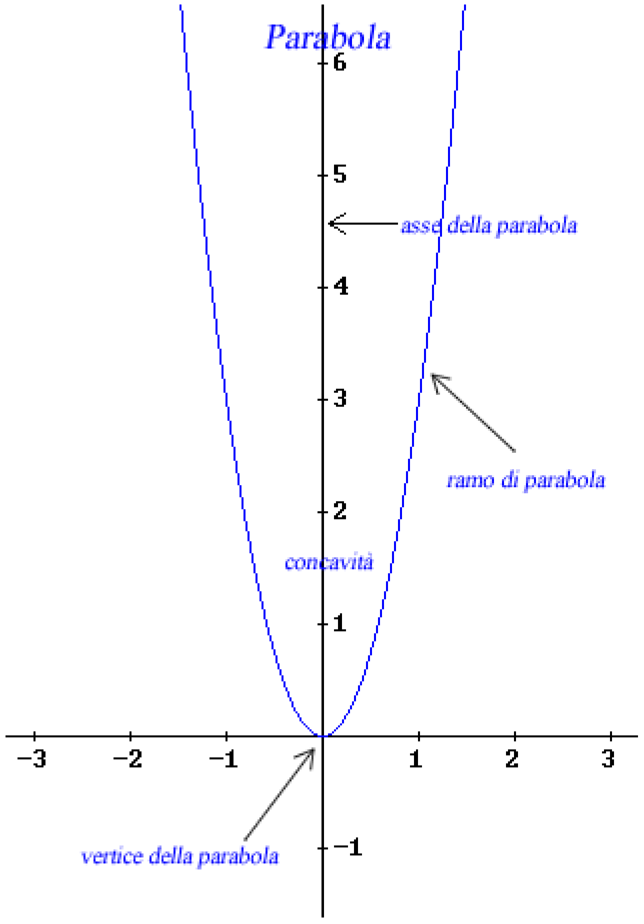


[4] Ricorda che per due punti passa una ed una sola retta.

EQUAZIONI DI ALTRE CURVE

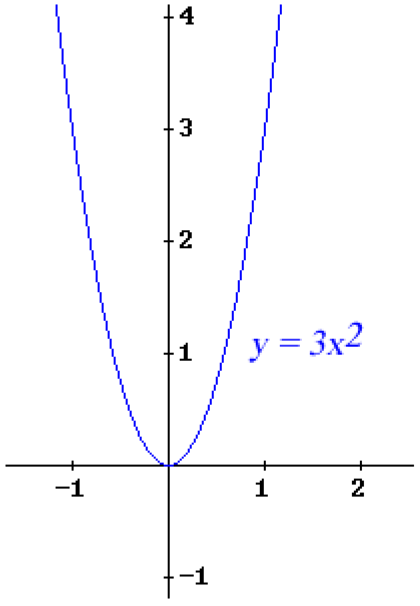
Equazione della parabola

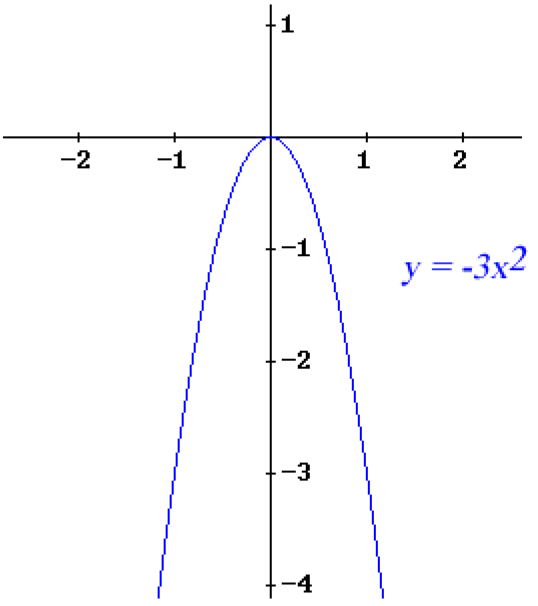
Una parabola è la linea che si ottiene da un'equazione di questo genere $y = ax^2$ dove a è un valore costante.



Se

a) $a > 0$ la concavità è verso l'alto
b) $a < 0$ la concavità è verso il basso



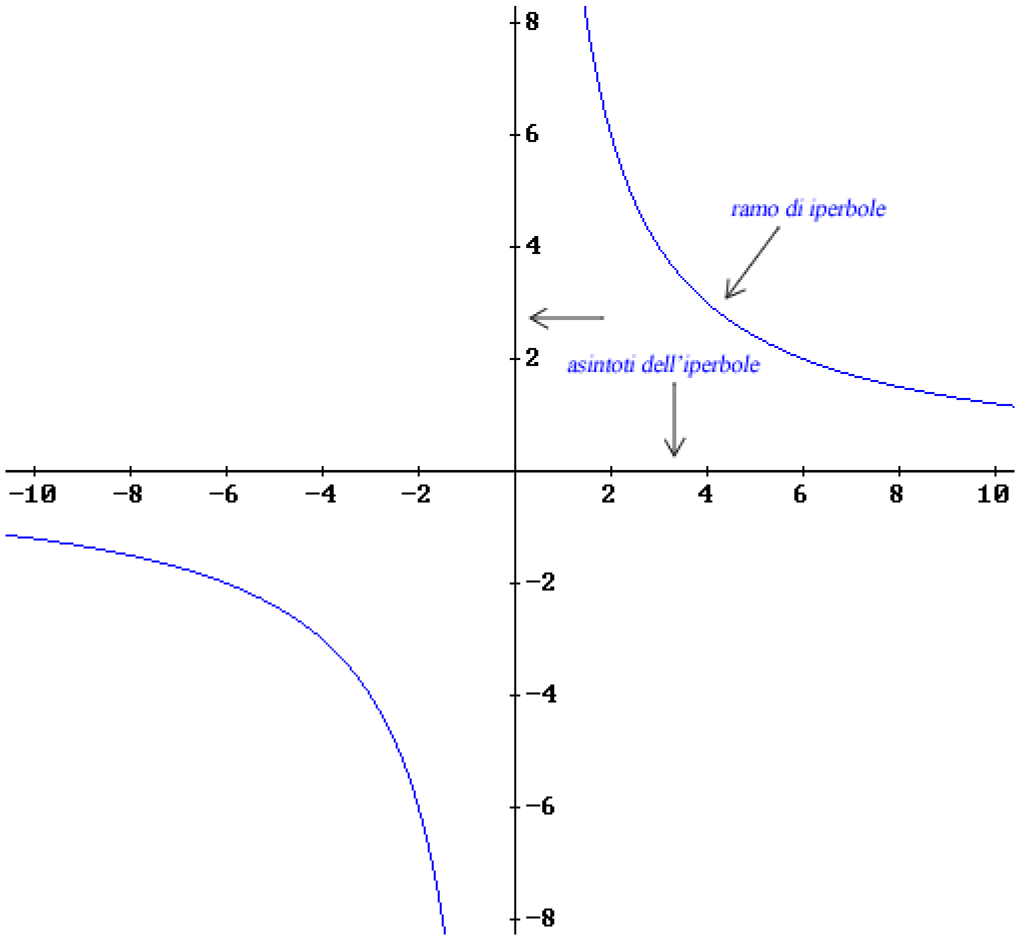


Equazione dell'iperbole equilatera

L'iperbole equilatera è si ottiene da un'equazione di questo tipo

$$y = \frac{k}{x}$$

dove k è un valore costante e x deve essere diverso da 0; essa è costituita da linee distinte dette rami.



Se

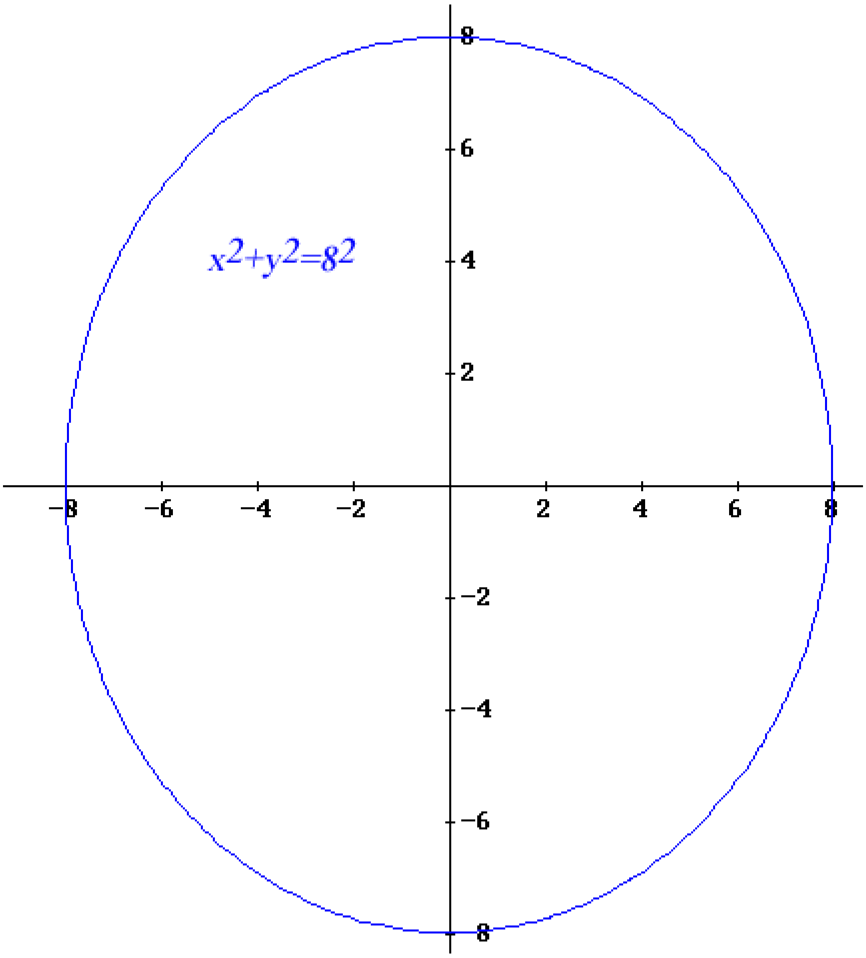
a) $k > 0$ i rami si trovano nel 1° e nel 3° quadrante
b) $k < 0$ i rami si trovano nel 2° e nel 4° quadrante

Essa rappresenta la proporzionalità inversa.

Equazione della circonferenza

L’equazione di una circonferenza avente come centro l’origine degli assi ha questa forma

$x^2 + y^2 = r^2$ dove r rappresenta il raggio della circonferenza.



.