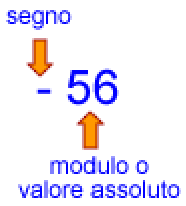
Prontuario degli argomenti di Algebra

NUMERI RELATIVI

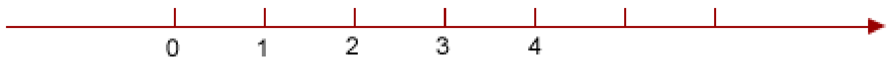


Un *numero relativo* è un numero preceduto da un segno + o - indicante la posizione rispetto ad un punto di riferimento a cui si associa il valore 0. Ogni numero relativo è composto dal segno (+ o -) e dal *modulo* o *valore assoluto*.
L'introduzione dei numeri relativi permette di dare un risultato a sottrazioni in cui il minuendo sia minore del sottraendo ossia $a - b$ con $a < b$.

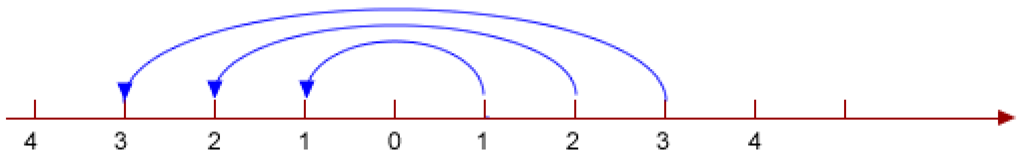
Insiemi numerici

L'insieme $\mathcal{Z}$ dei ***numeri interi*** costituisce un ampliamento dell'insieme $\mathcal{N}$ dei numeri naturali e lo costruire in questo modo:

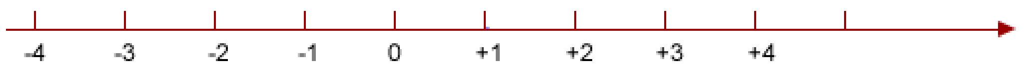
a) rappresentiamo l'insieme $\mathcal{N}$ sulla retta orientata



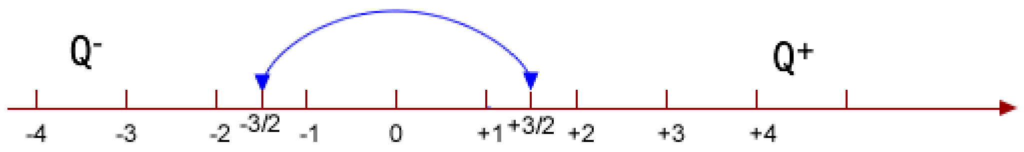
b) e troviamo il simmetrico di ciascun numero naturale rispetto allo 0

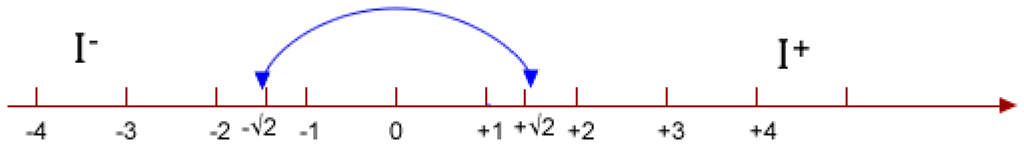


c) indichiamo con il segno + i numeri naturali a destra dello 0 e con il segno – quelli a sinistra.



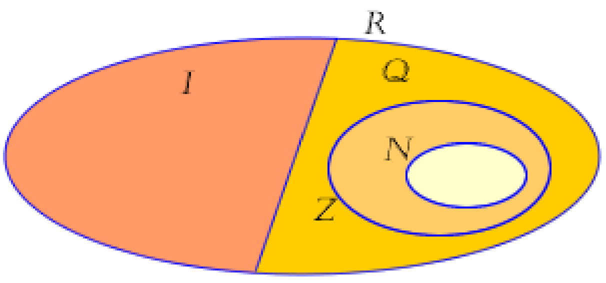
L'insieme $\mathcal{Z}^+$ degli interi positivi coincide con l'insieme $\mathcal{N}$ dei numeri naturali per cui $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z}$.
In modo analogo si costruisce l'insieme Q dei ***numeri razionali*** partendo da quello Q_a dei razionali assoluti e l'insieme I degli ***irrazionali*** partendo dagli irrazionali assoluti.





Numeri razionali e irrazionali formano l'insieme dei ***numeri reali*** $\mathcal{R}$.

Quadro riassuntivo degli insiemi numerici



Definizioni

Valore assoluto di un numero relativo è il numero privato del segno e si indica con questa scrittura $|\pm a| = a$

Numeri relativi concordi hanno lo stesso segno.

Numeri relativi discordi hanno segno diverso.

Numeri relativi opposti hanno segno diverso ma lo stesso valore assoluto.

L'opposto di un numero relativo è il numero cambiato di segno (opposto di +3 è -3; opposto di -9 è +9).

L'inverso di un numero *n* è $\frac{1}{n}$. Esempi (inverso di $+2\ \rightarrow +\frac{1}{2}$; inverso di $-3\ \rightarrow -\frac{1}{3}$; inverso di $-\frac{3}{2}\ \rightarrow -\frac{2}{3}$).

Il prodotto di un numero per il suo inverso è 1 → $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Confronto tra numeri relativi

Numeri relativi uguali → hanno lo stesso segno e il medesimo valore assoluto

Relazioni di minoranza / maggioranza

Numeri positivi → il *maggiore* è il numero con *valore assoluto maggiore*

Numeri negativi → il *maggiore* è il numero con *valore assoluto minore*

Numeri discordi → il *maggiore* è il numero positivo

Comportamento dello zero → lo zero è *minore di qualsiasi numero positivo* e *maggiore di qualsiasi numero negativo*

Operazioni in $\mathcal{R}$.

Addizione

Numeri con lo stesso segno: si sommano i valori assoluti e si mantiene il segno

Numeri con segno diverso: si trova la differenza tra i valori assoluti e si dà il segno del numero con valore assoluto maggiore.

Proprietà: *associativa*, *commutativa*

Elemento neutro: *zero*

Sottrazione

La sottrazione si trasforma in addizione sostituendo il secondo termine con il suo opposto ossia

$$a - b = a + (-b)$$

Esempi: +4 – (+6) = +4 + (-6) = -2; -9 – (-7) = -9 + (+7) = -2

Proprietà: *invariantiva*

Addizione algebrica

Poiché una sottrazione si può trasformare sempre in addizione otteniamo un'unica operazione detta *addizione algebrica* e il risultato *somma algebrica*.

Procedimento: Si eliminano i segni di operazione e si tolgono le parentesi lasciando inalterato il segno del numero se l'operazione è l'addizione, mettendo l'opposto del numero se l'operazione è la sottrazione; si procede come per l'addizione per trovare la somma.

Esempio

$$-4+(-7)-(+3)+(+6)-(-5)=$$
$$=-4-7-3+6+5=-14+11=-3$$

Moltiplicazione

Per moltiplicare due numeri relativi si moltiplicano i loro valori assoluti e come segno si seguono le seguenti regole:

- numeri concordi → segno +
- numeri discordi → segno –

Proprietà: *associativa*, *commutativa*, *distributiva rispetto all'addizione algebrica*

Elemento neutro: $+1$

Altro: $-1 \cdot a = -a \quad 0 \cdot a = 0$

Divisione

Per dividere due numeri relativi si trova il quoziente tra i loro valori assoluti e come segno si seguono le seguenti regole:

- numeri concordi → segno +
- numeri discordi → segno –

Proprietà: *invariantiva*, *distributiva rispetto all'addizione algebrica*

Potenza

La potenza di un numero relativo è positiva tranne nel caso in cui la base è negativa e l'esponente dispari.

Proprietà: valgono le stesse proprietà viste per i numeri reali assoluti.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (attenzione che *a* deve essere uguale anche nel segno)

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (attenzione che *a* deve essere uguale anche nel segno)

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{nm}$

Potenze particolari

$a^0 = 1$ qualunque sia la base

$a^1 = a$ con lo stesso segno della base

Potenze con esponente negativo

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ esempio → $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

Potenze con esponente frazionario (cenno)

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Radice

Radice di un numero positivo

La radice quadrata di un numero reale positivo ha due valori, uno positivo e l'altro negativo

$$\sqrt{+a} = \begin{cases} +\sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{cases}$$

In generale le radici di indice pari di un numero reale positivo hanno due valori tra loro opposti

Radice di un numero negativo

La radice quadrata di un numero reale negativo non esiste.

La radice cubica di un numero reale negativo esiste ed è negativa

$$\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{a}$$

In generale le radici di indice dispari di un numero reale negativo ha un valore negativo

In sintesi

- Se l'indice di radice è pari essa esiste solo se il radicando è positivo e ha due valori opposti tra loro
- Se l'indice di radice è dispari essa esiste sempre ed è positiva se il radicando è positivo, negativa se il radicando è negativo.

CALCOLO LETTERALE

Espressioni letterali

Un'espressione letterale è un insieme di numeri e lettere combinate tra loro da operazioni matematiche. L'espressione assume un valore numerico quando vengono assegnati valori numerici alle lettere.

Esempio

$$a^3 - 2ab + \frac{1}{4}a^2b$$

Se $a = 2; b = -4$ allora

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (-4) + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot (-4) = 4 + 16 + \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-4) = 20 - 4 = 16$$

Il valore dell'espressione letterale cambia quando vengono assegnati valori diversi alle lettere ossia il suo valore numerico dipende dai valori assegnati alle lettere.

Monomi

Il monomio è un'espressione letterale priva di addizioni e/o sottrazioni ossia i numeri e le lettere sono moltiplicati tra loro.

In un monomio si distingue una parte numerica (il coefficiente numerico) e una parte letterale.

$$\underbrace{-\frac{1}{3}}_{\text{coefficente numerico}}\overbrace{a^3b^5c}^{\text{parte letterale}}$$

Definizioni

Un monomio è ridotto a forma normale se contiene un solo fattore numerico, messo al primo posto, e potenze con basi letterali diverse tra loro.

Un monomio può essere:

- intero se non ci sono lettere come divisori $(3a^4; \frac{1}{5}ab)$
- frazionario se compaiono lettere come divisori $\left(\frac{3ab}{c^5}\right)$

Grado di un monomio

- rispetto ad una lettera: l'esponente della lettera nel monomio
- grado complessivo: la somma degli esponenti delle sue lettere

I monomi si dicono

- simili se hanno la medesima parte letterale $(-3ab; 4ab)$
- opposti se hanno la stessa parte letterale ma coefficienti numerici opposti $(-3ab; 3ab)$
- uguali se hanno la stessa parte letterale e lo stesso coefficiente numerico $(-3ab; -3ab)$

Addizione algebrica di monomi

Si sommano algebricamente tra loro solo i monomi simili e il monomio risultante ha come coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti mentre la parte letterale non cambia.

Esempi

$2ab + 5ab - 10ab = -5ab$

$2a - 3a + 6ab = -a + 6ab$

Moltiplicazione di monomi

Il prodotto di due o più monomi è un monomio che ha

- come coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti
- come parte letterale quella formata da tutte le lettere, ciascuna scritta una sola volta con esponente la somma degli esponenti che essa ha nei monomi

Esempio

$2a^2b \cdot 4a^2b^3 \cdot (-abc) = -8a^4b^4c$

$\frac{1}{5}x^3 \cdot \frac{10}{3}xy \cdot 9z = 6x^4yz$

Divisione tra monomi

Il quoziente tra due monomi, con il secondo diverso da 0, è un monomio che ha

- come coefficiente numerico il quoziente dei coefficienti
- come parte letterale quella formata dalle lettere del dividendo, ciascuna con esponente la differenza tra gli esponenti che essa ha nel dividendo e nel divisore, se vi compare.

Esempi

$3a^3b : ab = 3a^{3-1}b^{1-1} = 3a^2$

$\frac{1}{5}abc^3 : \frac{1}{10}ab^2c = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{1}a^{1-1}b^{1-2}c^{3-1} = 2b^{-1}c^2$

Elevamento a potenza di un monomio

La potenza di un monomio è il monomio che si ottiene elevando il coefficiente numerico all'esponente indicato e applicando la regola per il calcolo della potenza di una potenza alla parte letterale.

Esempio

$(3a^3b^4)^4 = 3^4a^{3\cdot4}b^{4\cdot4} = 81a^{12}b^{16}$

Casi particolari

Un monomio elevato all'esponente 1 è uguale al monomio stesso.

Un monomio elevato all'esponente 0 è uguale a 1.

Polinomi

Un polinomio è una somma algebrica di monomi non simili.

Definizioni

Un polinomio è ridotto a forma normale se in esse non compaiono termini simili e se tutti i monomi componenti sono scritti in forma normale.

Un polinomio si dice intero se i suoi termini sono tutti monomi interi, frazionario se almeno uno dei termini è un monomio frazionario.

Esempio

$2ab + \frac{1}{2}a^2 \ \rightarrow intero$

$\frac{a}{b} - 3a^2 \rightarrow frazionario$

Il grado di un polinomio è dato dal massimo tra i gradi dei suoi termini.

$2a^3b - \frac{1}{5}ab^2 \rightarrow 1° \ monomio\ 4\ grado, 2° \ monomio\ 3\ grado\ \ \rightarrow polinomio\ di\ 4\ grado$

Il grado di un polinomio rispetto ad una lettera è il massimo esponente con cui la lettera compare nel polinomio.

Un polinomio è omogeneo se tutti i monomi componenti hanno lo stesso grado.

Un polinomio si dice ordinato rispetto a una lettera se i suoi termini si susseguono secondo le potenze crescenti (o decrescenti) della lettera considerata.

Un polinomio si dice completo rispetto ad una lettera se, oltre al termine di grado più alto rispetto a quella lettera, contiene tutti i termini di grado inferiore compreso zero rispetto a quella lettera.

$-3a^4 + 5a^3b - 2a + 3 \rightarrow polinomio\ ordinato\ rispetto\ ad\ \boldsymbol{a}$

$-3a^4 + 5a^3b - \frac{2}{3}a^2 + 2a + 3 \rightarrow polinomio\ completo\ rispetto\ ad\ \boldsymbol{a}$

Riduzione di un polinomio

Per ridurre un polinomio si devono sommare algebricamente i monomi simili presenti sino ad ottenere solo monomi non simili

$\underline{2ab} - 7a + 5b - \underline{5ab} = -3ab - 7a + 5b$

Addizione algebrica di polinomi

L'addizione algebrica di polinomi si effettua addizionando algebricamente gli eventuali monomi simili presenti in modo da ottenere un polinomio composto solo da monomi non simili.

$(-2a^2b + 5a) - (3a^2b - 8a) + (-5a^2b - 4b) =$

$= -2\underline{a^2b} + 5\boxed{a} - 3\underline{a^2b} + 8\boxed{a} - 5\underline{a^2b} - 4b = -10a^2b + 13a - 4b$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando il monomio per tutti i termini del polinomio.

$5a^3(2ab - 3b^2) = 10a^4b - 15a^3b^2$

Moltiplicazione di due polinomi

Il prodotto di un polinomio per un'altro polinomio è il polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per i termini del secondo polinomio, riducendo gli eventuali termini simili.

Se i polinomi sono più di due si effettua la moltiplicazione tra i primi due e si moltiplica il polinomio risultante per il terzo polinomio, moltiplicando il polinomio risultante per il quarto polinomio e così via.

L'operazione è commutativa e associativa.

Esempio

$(x^3 - 2x)(3x^2y - 5y) = 3x^5y - 5x^3y - 6x^3y + 10xy = 3x^5y - 11x^3y + 10xy$

Divisione di un polinomio per un monomio

Il quoziente di un polinomio per un monomio è il polinomio che si ottiene dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio

$(3x^5y - 11x^3y + 10xy) : 3x = x^4y - \frac{11}{3}x^2y + \frac{10}{3}y$

Prodotti notevoli

Prodotto della somma per la differenze fra due monomi

Il prodotto della somma per la differenze fra due monomi è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Quadrato di un binomio

Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo monomio, più (se somma di monomi) o meno (se differenza di monomi) il doppio prodotto del primo monomio per il secondo, più il quadrato del secondo monomio.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Cubo di un binomio

Il cubo di un binomio è dato dal cubo del primo monomio, più (se somma di monomi) o meno (se differenza di monomi) il triplo del prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, più il triplo del prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo, più (se somma di monomi) o meno (se differenza di monomi) il cubo del secondo monomio.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EQUAZIONI DI 1° GRADO AD UN'INCOGNITA

Equazioni e identità

Si dice identità un'eguaglianza tra due espressioni letterali, detti membri, che è verificata per qualsiasi valore venga attribuito alla lettera o alle lettere che sono presenti.

Esempio

$3(5a-2)=15a-6$

Qualsiasi valore venga assegnato ad a il primo membro, $3(5a-2)$, darà un valore uguale a quello del secondo membro, $15a-6$.

Si dice equazione un'eguaglianza tra due espressioni letterali, detti membri, che è verificata solo per particolari valori attribuito alla lettera o alle lettere che sono presenti. Le lettere presenti sono dette incognite.

Esempio

$5a-2=3a+2$ L'eguaglianza è verificata solo se $a=2$

Quando l'incognita è una sola (indicata comunemente con la lettera x) e l'esponente è 1 si ha un'equazione di 1° grado ad un'incognita. Il valore che verifica l'equazione viene detto soluzione o radice dell'equazione.

I valori numerici non associati all'incognita si dicono termini noti.

Due o più equazioni si dicono equivalenti quando hanno la stessa soluzione.

Principi d'equivalenza

1° principio: Addizionando o sottraendo da entrambi i membri di un'equazione uno stesso termine (termine noto o incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

2° principio: moltiplicando o dividendo per uno stesso numero, diverso da 0, entrambi i membri di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Risoluzione di un'equazione di 1° grado

Un'equazione di 1° grado si dice ridotta a forma normale quando viene ridotta a questa forma

$$ax=b$$

Dove a è il coefficiente dell'incognita e b il termine noto.

Dividendo entrambi i membri per a si ottiene la formula risolutiva dell'equazione di primo grado

$$x=\frac{b}{a}$$

Per ridurre un'equazione di 1° grado a forma normale si applicano sia il 1° che il 2° principio di equivalenza. In pratica si può utilizzare questa procedura:

a) si eliminano le eventuali parentesi eseguendo i calcoli indicati;

b) nel caso di equazioni a termini frazionari si trova il m. c. m. tra i denominatori e si moltiplica ciascun numeratore per il valore ottenuto dividendo il m. c. m. per il relativo denominatore. Successivamente si moltiplicano entrambi i membri per il m. c. m. ottenendo un'equazione senza termini frazionari;
c) Si scrivono al 1° membro le incognite con i loro coefficienti e nel 2° i termini noti, cambiando di segno i termini che sono trasportati da un membro all'altro;
d) Si eseguono le operazioni indicate in modo da ottenere la forma normale $ax = b$;
e) Si applica la formula risolutiva $x = \frac{b}{a}$.

Esempio

$$\frac{2x-3}{12} - \frac{5x+2}{8} = \frac{4-5x}{3} - \frac{1-3x}{6}$$

$$\frac{2(2x-3) - 3(5x+2)}{24} = \frac{8(4-5x) - 4(1-3x)}{24}$$

$$24 \cdot \frac{4x - 6 - 15x - 6}{24} = \frac{32 - 40x - 4 + 12x}{24} \cdot 24$$

$$4x - 6 - 15x - 6 = 32 - 40x - 4 + 12x$$

$$-11x - 12 = -28x + 28$$

$$-11x + 28x = 28 + 12$$

$$17x = 40$$

$$x = \frac{40}{17}$$

Discussione di un'equazione di 1° grado

Quando il coefficiente a dell'incognita o il termine noto b sono uguali a 0 si presentano i seguenti casi:

- $a \neq 0, b = 0 \rightarrow$ l'equazione è determinata in quando ha un'unica soluzione[1] ossia $x = \frac{0}{a} = 0$
- $a = 0, b \neq 0 \rightarrow$ l'equazione è impossibile in quando si ha 0 al denominatore ossia $x = \frac{a}{0}$
- $a = 0, b = 0 \rightarrow$ l'equazione è indeterminata in quando ha infinite soluzioni

Verifica di un'equazione di 1° grado

La verifica di un'equazione di 1° grado si effettua sostituendo all'incognita dell'equazione data la sua radice e verificando che il valore numerico del primo membro sia uguale a quello del secondo membro.

Una particolare equazione di 2° grado

$$ax^2 = b$$

Questa equazione viene verificata da due valori dell'incognita, uno positivo e l'altro negativo, che possono essere ricavati in questo modo

[1] Questo vale anche se $b \neq 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Perché l'equazione sia risolvibile occorre che il coefficiente dell'incognita e il termine noto abbiano lo stesso segno altrimenti il radicando risulterebbe negativo e la radice quadrata di un numero negativo non ha soluzione nell'insieme dei numeri reali.

DISEQUAZIONI DI 1° GRADO A UN'INCOGNITA

Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni letterali che è verificata da un insieme di valori assegnati all'incognita o alle incognite. Nelle disequazioni di 1° grado ad un'incognita abbiamo una sola incognita ed un solo insieme di valori che la possono verificare. Essa può presentarsi, nella sua forma normale, in queste maniera

$$ax > b; \;\; ax < b; \;\; ax \geq b; \;\; ax \leq b$$

Le soluzioni di una disequazione possono essere rappresentate sulla retta orientata.

Due disequazioni sono equivalenti quando hanno le stesse soluzioni.

Principi di equivalenza delle disequazioni

1° principio: Addizionando o sottraendo da entrambi i membri di disequazione uno stesso termine (termine noto o incognita) si ottiene disequazione equivalente a quella data.
In pratica si possono trasportare i termini da un membro all'altro della disequazione cambiandone il segno.

2° principio: moltiplicando o dividendo per uno stesso numero positivo entrambi i membri di disequazione si ottiene un'equazione equivalente a quella data e con lo stesso verso. Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero negativo entrambi i membri di disequazione si ottiene un'equazione equivalente a quella data ma con verso opposto.

Risoluzione di una disequazione di 1° grado

Una disequazione deve essere ridotta in forma normale in modo analogo a quello visto per le equazioni di 1° grado ossia applicando i principi d'equivalenza della disequazioni e utilizzando una delle seguenti formule risolutive

$$ax > b \;\; x > \frac{b}{a}; \;\; ax < b \;\; x < \frac{b}{a}; \;\; ax \geq b \;\; x \geq \frac{b}{a}; \;\; ax \leq b \;\; x \leq \frac{b}{a}$$

Se a è negativo la disuguaglianza prende il verso opposto.

Esempio

$$-5x < 10 \;\;\; x > -\frac{10}{5} > -2$$

Esempio di soluzione

$$\frac{3x}{2} - \frac{1}{4} \leq x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{18x-3}{12} \leq \frac{12x+4}{12}$$

$$12 \cdot \frac{18x-3}{12} \leq \frac{12x+4}{12} \cdot 12$$

$$18x-3 \leq 12x+4$$

$$18x-12x \leq +4+3$$

$$6x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{6}$$

La disequazione è verificata da tutti i valori minori o uguali a $\frac{7}{6}$

Visualizzando la soluzione sulla retta orientata si ottiene