Prontuario degli argomenti di aritmetica per la classe 2ª

FRAZIONI

Numeri razionali assoluti

Un numero razionale assoluto è costituito da *una classe di frazioni equivalenti*, l'insieme di queste classi costituisce l'insieme dei numeri razionali assoluti che viene indicato con Q_a. Un numero razionale assoluto lo si può rappresentare prendendo all'interno della classe di equivalenza la frazione ridotta ai minimi termini[1]. L'insieme Q_a rappresenta un *ampliamento dell'insieme dei numeri naturali* ed è chiuso rispetto all'addizione alla moltiplicazione e a alla divisione.

Riepilogo del calcolo con le frazioni

Addizione / sottrazione	Per addizionare / sottrarre due o più frazioni bisogna che abbiano le stesso denominatore; se le frazioni non hanno lo stesso denominatore bisogna trovare le frazioni equivalenti con lo stesso denominatore attraverso il calcolo del m. c. m tra i denominatori stessi. Successivamente si addizionano / sottraggono i numeratori ottenendo una frazione che ha come numeratore la somma / differenza tra i numeratori delle frazioni e come denominatore il denominatore comune.
Moltiplicazione	Per moltiplicare due o più frazioni si moltiplicano tra loro i numeratori e tra loro i denominatori dei fattori dopo aver effettuato le eventuali semplificazioni tra numeratori e denominatori[2].
Frazione reciproca o inversa	La inversa o reciproca di una frazione $\frac{a}{b}$ è la frazione $\frac{b}{a}$. Il loro prodotto è 1.
Divisione	Per dividere due frazioni si moltiplica la prima per l'inverso della seconda.
Potenza	La potenza di una frazione si ottiene elevando allo stesso esponente sia numeratore che denominatore: L'operazione di elevamento a potenza si indica $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Le scritture $\frac{a^n}{b}$; $\frac{a}{b^n}$; $\frac{a^n}{b^m}$ indicano rispettivamente l'elevamento a potenza del numeratore, l'elevamento a potenza del denominatore e l'elevamento a potenze diverse del numeratore e del denominatore.

[1] Frazione con numeratore e denominatore primi fra loro

[2] La riduzione ai minimi termini può essere eseguita successivamente sul prodotto ma si consiglia la semplificazione tra numeratore e denominatore dei fattori della moltiplicazione.

Frazioni decimali

Una frazione decimale ha come denominatore 10 o una sua potenza $\frac{a}{10^n}$. Una frazione decimale si può rappresentare con la scrittura decimale ossia con un numero decimale finito. Esso è costituito dalla parte intera e dalla parte decimale separate da una virgola[3].

La trasformazione da frazione decimale a numero decimale finito può essere compresa osservando l'esempio

$$\frac{3489}{100}=\frac{3000}{100}+\frac{400}{100}+\frac{80}{100}+\frac{9}{100}=30+4+\frac{8}{10}+\frac{9}{100}$$

La parte intera è il numero 34 (30 + 4) e la parte decimale da $\frac{8}{10}+\frac{9}{100}$ (8 decimi e 9 centesimi) e si scrive 34,89. Per ottenere

- ✓ il *numero decimale da una frazione decimale*, si divide il numeratore per la potenza di 10 al denominatore.
- ✓ la *frazione decimale dal numero decimale*, si scrive come numeratore il numero privo della virgola e come denominatore la potenza di dieci che ha come esponente il numero di cifre decimali significative.

Una generica frazione ridotta ai minimi termini può essere trasformata in frazione decimale se *il suo denominatore scomposto in fattori primi contiene esclusivamente i fattori 2 o 5 oppure entrambi*.

Numeri decimali periodici

Una frazione ridotta ai minimi termini che non può essere trasformata in frazione decimale dà origine a un *numero decimale illimitato periodico*.

Un *numero decimale illimitato periodico* è un numero in cui una parte della sua parte decimale si ripete indefinitamente.

Il numero periodico, generalmente, presenta tre elementi:

- ✓ la *parte intera*, composta dalle cifre poste prima della virgola;
- ✓ il *periodo*, che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola, esso si simboleggia con un trattino sopra la cifra o il gruppo di cifre che rappresenta il periodo (es. $4{,}747474\ldots=4{,}\overline{74}$);
- ✓ l'*antiperiodo*, la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo (es. $4{,}2474747\ldots=4{,}2\overline{47}$).

Se il numero decimale periodico presenta un antiperiodo viene detto *periodico misto* altrimenti *periodico semplice*.

Una frazione ridotta ai minimi termini dà origine

[3] Nel mondo anglosassone e in molte calcolatrici al posto della virgola c'è il punto.

- ✓ a un numero periodico semplice se nella scomposizione in fattori primi del denominatore non compaiono i fattori 2 o 5;
- ✓ a un numero periodico misto se nella scomposizione in fattori primi del denominatore compaiono anche i fattori 2 o 5 oltre ad altri fattori primi.

Per ottenere

- ✓ un *numero periodico da una frazione ridotta ai minimi termini* si divide il numeratore per il denominatore fino a che non si ottiene *un resto o una serie di resti che si ripetono*;
- ✓ una *frazione* (detta *frazione generatrice*) *da un numero periodico* si procede in questo modo[4]:
  a) *numeratore*: si scrive il numero senza virgola e si toglie la parte prima del periodo (parte intera nel periodico semplice, parte intera e antiperiodo nel periodico misto;
  b) *denominatore*: si mettono tanti 9 quante sono le cifre del periodo e, se presente, tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo;
  c) si riduce, se possibile, ai minimi termini.

Casi particolari

Numero periodico semplice con 9 come periodo: la frazione generatrice è una *frazione apparente*, infatti $3,\overline{9} = \frac{39-3}{9} = \frac{36}{9} = 4$

Numero periodico misto con 9 come periodo: la frazione generatrice è una *frazione decimale*, infatti $3{,}4\overline{9} = \frac{349-34}{90} = \frac{315}{90} = \frac{35}{10}$

Approssimazioni

Per *approssimazione* si intende l'avvicinamento ad un valore che non può essere dato in modo esatto (per esempio il valore di un numero decimale periodico[5]).

L'approssimazione:

- ✓ per *difetto* è un numero minore del numero dato
- ✓ per *eccesso* è un numero minore del numero dato

Nell'approssimazione si considerano un certo numero di cifre decimali e più ne vengono considerate minore è l'errore. Se si considerano:

- ✓ 0 cifre dopo la virgola l'approssimazione è all'*unità*
- ✓ 1 cifra dopo la virgola l'approssimazione è al *decimo*
- ✓ 2 cifre dopo la virgola l'approssimazione è al *centesimo*
- ✓ 3 cifre dopo la virgola l'approssimazione è al *millesimo*

---

[4] Una dimostrazione di questo procedimento non può essere data per esteso a questo livello di scuola ma si può giustificare seguendo l'esempio. Consideriamo il numero $x = 3{,}4444$ .... e moltiplichiamo per 10 i membri dell'uguaglianza ottenendo $10 \cdot x = 34{,}444$ .....
Se togliamo il numero x da entrambi i membri dell'uguaglianza otteniamo $10 \cdot x - x = 34{,}444$ .... - 3,4444…da cui deriva $9 \cdot x = 31$ e $x = \frac{31}{9}$

[5] Che si può comunque rappresentare in forma frazionaria.

- ✓ … e così via

L'*arrotondamento* consiste nel considerare il *numero che più si avvicina al numero dato ma con un numero finito di cifre significative*. Una volta stabilito con quale approssimazione si vuole arrotondare il numero:

1) si considera la cifra successiva ad destra rispetto a quella scelta per l'arrotondamento
2) se la cifra è
    a) minore di 5 la si pone uguale a 0 assieme alle cifre successive (es. 3,43686 approssimato al decimo 3,4)
    b) maggiore o uguale di 5 la si pone uguale a 0 assieme alle cifre successive e si aumenta di 1 la cifra che la precede (es. 3,47686 approssimato al decimo 3,5)

RADICI E NUMERI IRRAZIONALI

La radice n-esima[6] di un numero a, indicata con $\sqrt[n]{a}$, è un numero b tale che $b^n = a$; a vien detto *radicando, n indice di radice* e *b radice*.

La *radice quadrata* di un numero a, indicata con $\sqrt{a}$[7], è un numero b tale che $b^2 = a$.

La radice quadrata di un numero a è un *numero naturale* solo se a è un *quadrato perfetto*[8].

La radice quadrata di un quadrato non perfetto porta ad un nuovo tipo di numero detto *numero irrazionale assoluto*. Questo numero non può essere espresso sotto forma di frazione per cui non appartiene all'insieme dei numeri razionali assoluti; questi numeri appartengono all'*insieme dei numeri irrazionali assoluti* (I_a). L'unione di Q_a e I_a forma l'insieme dei numeri reali assoluti ($\mathbb{R}_a$).

La dimostrazione dell'esistenza di questi numeri parte dalla dimostrazione dell'irrazionalità della $\sqrt{2}$; per questa dimostrazione vedi http://www.gpmeneghin.com/ftp/rad2.pdf.

Un numero irrazionale ha la parte decimale *illimitata* e *non periodica*. È possibile avvicinarsi al valore di un numero irrazionale considerando le *approssimazioni per difetto e per eccesso*; per esempio

$$3 < \sqrt{12} < 4$$

$$3{,}4 < \sqrt{12} < 3{,}5$$

$$3{,}46 < \sqrt{12} < 3{,}47$$

$$\ldots < \sqrt{12} < \cdots$$

Si ottengono così due *successioni infinite* una per difetto(3; 3,4; 3,46; …) che aumenta sempre più e una per eccesso (4; 3,5; 3,47; …) che diminuisce; le due successioni non hanno elementi in comune.

Proprietà della radice quadrata

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

[6] Si legge ennesima
[7] Viene omesso l'indice 2.
[8] Un numero è un quadrato perfetto se la sua scomposizione in fattori primi contiene solo fattori con esponete pari.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a^n} \Rightarrow \begin{cases} n\ pari\ \sqrt{a^n} = a^{n/2} \\ n\ dispari\ \sqrt{a^n} = a^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{a} \end{cases} \Rightarrow$ esempio $\begin{cases} \sqrt{5^8} = 5^{8/2} = 5^4 = 625 \\ \sqrt{5^5} = 5^{\frac{5-1}{2}} \cdot \sqrt{5} = 5^2 \cdot \sqrt{5} = 25 \cdot \sqrt{5} \end{cases}$

Metodi di calcolo della radice quadrata di un numero naturale

Approssimazioni successive

Procedimento	Esempio	Approssimazione
Dato un numero naturale *a* si individuano i quadrati perfetti tra i quali si trova.	$a = 40$ $36 < 40 < 49$	
La $\sqrt{a}$ si troverà tra le radici dei quadrati perfetti	$6 < \sqrt{40} < 7$	unità
Si individua con il calcolo (nell'esempio facendo $6{,}1^2$; $6{,}2^2$; $6{,}3^2$ .. e controllando quale quadrato si avvicina di più per difetto 40) la prima cifra decimale per difetto.	$6{,}3 < \sqrt{40} < 6{,}4$	decimo
Si individua con il calcolo (nell'esempio facendo $6{,}31^2$; $6{,}32^2$; $6{,}33^2$ .. e controllando quale quadrato si avvicina di più per difetto 40) la seconda cifra decimale per difetto.	$6{,}32 < \sqrt{40} < 6{,}33$	centesimo
Si continua nello stesso modo fino a raggiungere l'approssimazione desiderata		

Uso delle tavole o la calcolatrice ⇒ vedi quanto riportato nel testo di aritmetica

Algoritmo per l'estrazione della radice quadrata ⇒ vedi quanto riportato nel testo di aritmetica

Questo algoritmo consente di ottenere la radice quadrata di un numero con qualsiasi approssimazione.

Scomposizione in fattori primi con isolamento del fattore irrazionale

Dato un numero naturale *a* si trova la sua scomposizione in fattori primi e, per ogni fattore se l'esponente *n* è pari si trova la radice dividendo l'esponente *n* per 2 l'esponente *n* è dispari e maggiore di 1 lo si trasforma in un prodotto di due fattori avente come base il fattore stesso e come esponenti 1 e la differenza *n* -1. Si trova la radice dividendo l'esponente *n* -1 per 2 e lasciando sotto radice l'altro fattore.

Si moltiplicano tra loro i fattori fuori radice (le radici estratte) e i fattori sotto radice, il prodotto sotto radice costituisce il *fattore irrazionale*.

Esempio

$$\sqrt{6000} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5^3} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 5^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{15} = 20 \cdot \sqrt{15}$$

$\sqrt{15}$ è il *fattore irrazionale* della $\sqrt{6000}$

Se tutti gli esponenti sono pari allora si tratta di un *quadrato perfetto* e la sua radice è un numero *naturale*.

RAPPORTI E PROPORZIONI

Il *rapporto* tra due numeri *a* e *b* con $b \neq 0$ è il loro quoziente esatto ossia

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Esempi

Rapporto tra 9 e 15 $\Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ rapporto tra 6 e 2 $\Rightarrow \frac{6}{2} = 3$

L'*inverso* del rapporto tra *a* e *b* è $\frac{b}{a}$ e si ha che $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$.

I numeri *a* e *b* sono i termini del rapporto: *a* è l'antecedente, *b* il conseguente.

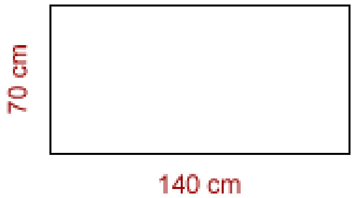
Rapporti tra grandezze[9]

Rapporto tra grandezze omogenee

Sono *omogenee* le grandezze che si possono confrontare[10] per cui si possono addizionare o sottrarre ottenendo sempre una grandezza dello stesso tipo, in caso contrario sono *non omogenee*.

Il rapporto tra le misure *a* e *b* di due grandezze omogenee è un *numero puro* ossia senza unità di misura e rappresenta il confronto tra le due misure.

Esempi



Rapporto tra lunghezza e altezza del rettangolo

$$\frac{140\ cm}{70\ cm} = 2$$

Ossia la larghezza è il doppio dell'altezza o l'altezza è la meta della larghezza

[9] Ricorda che grandezza è un proprietà che può essere misurata

[10] Per cui si può adottare la stessa unità di misura

Rapporto tra lunghezza e altezza del rettangolo

$$\frac{180\ cm}{40\ cm} = \frac{9}{2}$$

Ossia la larghezza è i $\frac{9}{2}$ dell'altezza o l'altezza è i $\frac{2}{9}$ della larghezza.

Due grandezze si dicono *commensurabili* se il loro rapporto *è un numero razionale* per cui hanno un sottomultiplo in comune.

Due grandezze si dicono in*commensurabili* se il loro rapporto *non è un numero razionale* (è *irrazionale*) per cui *non hanno un sottomultiplo in comune*[11].

Rapporto tra grandezze non omogenee

Il rapporto tra due grandezze non omogenee è il quoziente tra le loro misure e *rappresenta il valore di un'altra grandezza non omogenea alle grandezze date*, la cui *unità di misura dipende dalle grandezze di partenza*.

Esempi

Dal rapporto tra *peso* di un corso e suo *volume* si ottiene una nuova grandezza, il *peso specifico*, ossia il peso dell'unità di volume $\left(ps = \frac{P}{V} = \frac{Kg}{dm^3} = \frac{g}{cm^3}\right)$.

Dal rapporto tra la *distanza* percorsa da un corpo e il *tempo* impiegato si ottiene la *velocità*, ossia la *distanza percorsa nell'unità di tempo* $\left(v = \frac{s}{t} = \frac{metri}{secondo}\right)$.

Proporzioni

Una proporzione è un'eguaglianza fra due rapporti ovvero quattro numeri a, b, c, d formano una proporzione se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Questa eguaglianza si rappresenta in questo modo

$$a : b = c : d$$[12]

- ✓ *a*, *c* e *b*, *d* sono detti rispettivamente *antecedenti* e *conseguenti*
- ✓ *a*, *d* e *b*, *c* sono detti rispettivamente *estremi* e *medi*
- ✓ se una proporzione ha i medi uguali viene detta *continua* e il medio si dice *medio proporzionale*

[11] Per i segmenti commensurabili e incommensurabili vedi il prontuario di geometria
[12] Si legge *a* sta a *b* come *c* sta a *d*.

Proprietà fondamentale delle proporzioni

In ogni proporzione *il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi*

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dimostrazione

Consideriamo i due rapporti uguali $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e riduciamo le due frazioni allo stesso denominatore moltiplicando tra loro i denominatori $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$. Applichiamo la proprietà invariantiva moltiplicando entrambi i rapporti per $b \cdot d$ ottenendo

$$\frac{a \cdot d}{\cancel{b \cdot d}} \cdot \cancel{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{\cancel{b \cdot d}} \cdot \cancel{b \cdot d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

$\Rightarrow$ Quattro numeri a, b, c, d formano una proporzione se $a \cdot d = b \cdot c$

Altre proprietà delle proporzioni

Sono proprietà che consento di ottenere nuove proporzioni da una data.

Invertire

$$a : b = c : d \Rightarrow b : a = d : c$$

Permutare

$$a : b = c : d \Rightarrow a : c = b : d \Rightarrow d : b = c : a \Rightarrow d : c = b : a$$

Comporre

$$a : b = c : d \Rightarrow (a + b) : a = (c + d) : c \Rightarrow (a + b) : b = (c + d) : d$$

Scomporre

$$a : b = c : d \Rightarrow (a - b) : a = (c - d) : c \Rightarrow (a - b) : b = (c - d) : d$$

Calcolo del termine incognito di una proporzione

Calcolo del medio

$$a : x = c : d \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{c} \qquad a : b = x : d \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}$$

Calcolo dell'estremo

$$x : b = c : d \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d} \qquad a : b = c : x \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Proporzione continua

$$a : x = x : d \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot d} \qquad x : b = c : x \Rightarrow x = \sqrt{b \cdot c}$$

Successione di rapporti uguali

$$a : b = c : d = e : f = \cdots$$

In ogni successione di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo conseguente.

$$(a + c + e + \cdots) : (b + d + f + \cdots) = a : b$$

PROPORZIONALITÀ

Grandezza costanti e grandezze variabili

Una grandezza si dice *costante* se il suo valore *non cambia* mentre se può assumere *diversi valori o infiniti* è detta *variabile*.

Funzione

Legame tra due grandezze

Date due grandezze A e B e un legame tra le due, se ad ogni valore x di A corrisponde uno ed uno solo valore y di B allora si dice che y è *funzione* di x e indichiamo il legame con $y = f(x)$.

La variabile x viene detta *variabile indipendente* mentre la variabile y, *variabile dipendente*.

Interpretazione insiemistica[13]

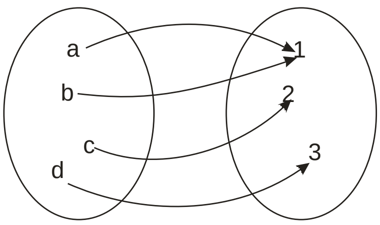
Una relazione[14] tra due insiemi A e B è un qualsiasi legame che permette di far corrispondere ad un elemento x di A uno o più elementi di B. Una relazione di questo tipo può essere scritta così $x\mathcal{R}y$[15] dove $\mathcal{R}$ rappresenta la relazione tra gli elementi x di A e y di B.

Esempio: la relazione tra l'insieme A delle città e l'insieme B delle nazioni data da

x è una città di y

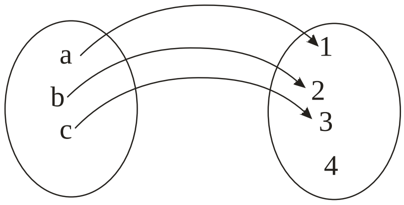
Se la relazione $\mathcal{R}$ fa corrispondere ad ogni elemento x di A uno ed uno solo elemento y (detto *immagine*) di B allora $\mathcal{R}$ è una *funzione*[16] e si può scrivere $y = f(x)$ oppure $f: A \to B$[17]

L'insieme A è detto *dominio* della funzione mentre l'insieme B è il *codominio*[18].

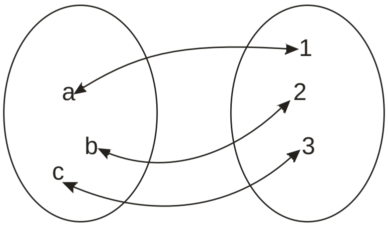


Una funzione tra due insiemi A e B è detta *suriettiva* se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A.

[13] Questa parte verrà approfondita il prossimo anno scolastico.
[14] Vedi in appendice "Relazione all'interno di un insieme" e "Prodotto cartesiano di insiemi".
[15] Questa viene anche detta frase aperta a due variabili.
[16] Può essere indicata anche con i termini *applicazione* e *mappa*.
[17] Noi useremo sempre $y = f(x)$
[18] Indicato anche con $f(A)$



Una funzione tra due insiemi A e B è detta *iniettiva* se ogni elemento di B corrisponde al più un elemento di A.



Una funzione tra due insiemi A e B è detta *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Si dice anche che tra A e B c'è una *corrispondenza biunivoca*.

Funzioni empiriche e funzioni matematiche

Una funzione si dice *empirica* se il legame che fa dipendere i valori *y* della variabile dipendente dai valori *x* della variabile indipendente *non è di tipo matematico* mentre è *matematica* se il legame si può esprimere con una *formula*.

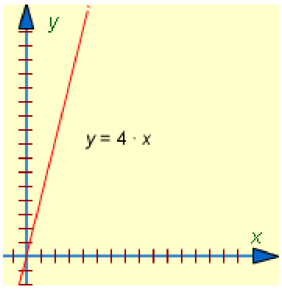
Grafico di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$ si può far corrispondere ad ogni coppia di valori *x*, *y* un punto nel *piano cartesiano*[19], l'insieme di questi punti costituisce il *grafico* della funzione.

Grandezze direttamente proporzionali

Definizioni

- ✓ Due grandezze variabili A e B sono *direttamente proporzionali* se al raddoppiare, triplicare, ecc. dei valori *x* di A anche i valori *y* di B raddoppiano, triplicano, ecc.
- ✓ Due grandezze variabili A e B sono *direttamente proporzionali* se il rapporto tra i corrispondenti valori *y* di B e *x* di A è *costante* ossia $\frac{y}{x} = k$. Il valore costante *k* è detto *coefficiente di proporzionalità diretta*; si può scrivere anche $y = k \cdot x$ che è *la legge di proporzionalità diretta*.



Il grafico di una legge di proporzionalità diretta è una retta che passa per l'origine degli assi.

Data una legge di proporzionalità diretta $y = k \cdot x$ i valori *y* si calcolano moltiplicando ciascun valore *x* per la costante *k*; le coppie di valori possono essere riportate su un piano cartesiano in modo da disegnare il grafico della funzione.

Grandezze inversamente proporzionali

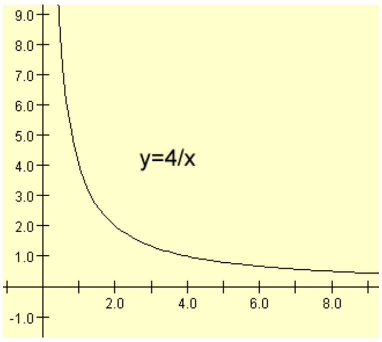
Definizioni

- ✓ Due grandezze variabili A e B sono *inversamente proporzionali* se al raddoppiare, triplicare, ecc. dei valori *x* di A i valori *y* di B diventano la metà, un terzo, ecc.

[19] Vedi in appendice un riepilogo del piano cartesiano

- ✓ Due grandezze variabili A e B sono *inversamente proporzionali* se il prodotto tra i corrispondenti valori x di A e y di B è *costante* ossia $x \cdot y = k$. Il valore costante k è detto *coefficiente di proporzionalità inversa*; si può scrivere anche $y = \frac{k}{x}$ con $x \neq 0$ che è *la legge di proporzionalità inversa*.

Il grafico di una legge di proporzionalità inversa è una curva che prende il nome di *iperbole equilatera*; la curva non interseca ne l'asse $\boldsymbol{x}$ (per intersecarlo y dovrebbe valere 0 ma questo non è possibile perché il rapporto $\frac{k}{x}$ è 0 solo se k è 0) ne quello $\boldsymbol{y}$ (per intersecarlo x dovrebbe valere 0 ma questo non è possibile).



Data una legge di proporzionalità inversa $y = \frac{k}{x}$ i valori y si calcolano dividendo k per ciascun valore x ($x \neq 0$); le coppie di valori possono essere riportate su un piano cartesiano in modo da disegnare il grafico della funzione.

Applicazioni della proporzionalità

Percentuale

La percentuale è un rapporto avente come conseguente 100 e si indica con a% dove a è un numero (detto *tasso percentuale*) che rappresenta l'antecedente ossia $\frac{a}{100} = a\%$ (esempio $4\% = \frac{4}{100}$). Un qualsiasi rapporto può trasformare in percentuale attraverso la seguente proporzione

$$a : b = t : 100$$

Dove a e b rappresentano, rispettivamente, antecedente e conseguente di un rapporto e t il tasso percentuale. Si può anche scrivere

$$t = \frac{a \cdot 100}{b} \qquad a = \frac{b \cdot t}{100} \qquad b = \frac{a \cdot 100}{t}$$

APPENDICE

Prodotto cartesiano di insiemi[20]

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B, indicato con $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate[21] (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Esempio $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1,2\}$

$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2),(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

Relazioni in un insieme[22]

Una relazione R può essere posta tra gli elementi di un insieme e può avere le seguenti proprietà

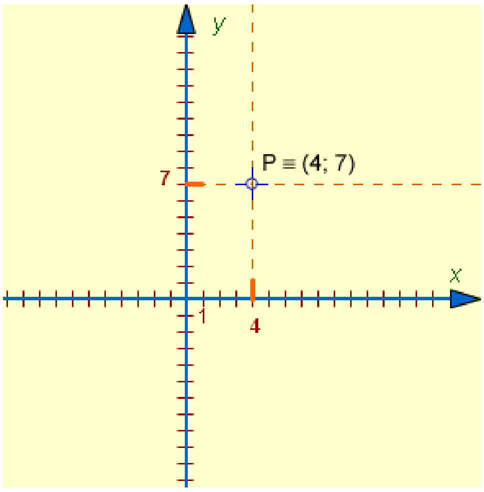
- ✓ *Riflessiva*: ogni elemento è in relazione con se stesso ($x\mathcal{R}x$);
- ✓ *Simmetrica*: se l'elemento x è in relazione con y anche y è in relazione con x ($x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$) ;
- ✓ *Transitiva*: se l'elemento x è in relazione con y e y è in relazione con l'elemento z allora x è in relazione con z ($x\mathcal{R}y\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$).

Una relazione che possiede tutte e tre le proprietà è detta *relazione d'equivalenza*.

Una relazione che possiede le proprietà riflessiva e transitiva ma non la simmetrica (antisimmetrica) è detta *relazione d'ordine*.

Una relazione che possiede la proprietà transitiva ma non la simmetrica (antisimmetrica) e la riflessiva (antiriflessiva) è detta *relazione d'ordine stretto*.

Piano cartesiano



Un piano cartesiano è un piano in cui è inserito un sistema di riferimento formato da due rette orientate perpendicolari[23] tra loro (gli assi); il punto d'intersezione delle rette viene detto *origine*. Le rette sono graduate, partendo dall'origine, adottando una determinata unità di misura: l'asse orizzontale *(asse delle ascisse*) è graduato verso destra (*positivo*) e verso sinistra (*negativo*); l'asse verticale *(asse delle ordinate*) è graduato verso l'alto (positivo) e verso il basso (negativo). Ogni punto P del piano cartesiano è individuata da una coppia ordinata di numeri (x, y), le *coordinate del punto* , dove x indica la distanza dall'asse **y** (detta *ascissa* o *coordinata x*) e y quella dall'asse **x** (detta *ordinata* o *coordinata y*)[24].

[20] Da sviluppare nel prossimo anno scolastico
[21] Una coppia ordinata di elementi è un insieme formato da due elementi, tra i quali si può distinguere un primo e un secondo elemento. Si in dica con (x, y); la coppia (x, y) è diversa dalla coppia (y, x)
[22] Vedi nota 20
[23] Un sinonimo di perpendicolare è *ortogonale*.
[24] Per una animazione interattiva delle coordinate cartesiane vedi: http://www.gpmeneghin.com/schede/analitica/coord.htm.